GEORGETA MIHNEA

MATEMATICI APLICATE

Editura Universității din București

Conf. dr. GEORGETA MIHNEA

MATEMATICI APLICATE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
2000

Referenţi ştiinţifici: Conf. dr. N. POPA
Conf. dr. LIVIU NICOLESCU

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon/Fax 410.23.84
E-mail: editura.@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
MIHNEA, GEORGETA
Matematici aplicate / Georgeta Mihnea - Bucureşti
Editura Universităţii din Bucureşti, 2000
140 p.; 23,5 cm.
Bibliogr.
ISBN 973-575-443-6

51-7

Capitolul 1

ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1.1 Introducere

In studiul ştiintelor naturii apar în mod frecvent două feluri de mărimi: scalare şi vectoriale.

Mărimile scalare, sunt bine determinate prin cunoaşterea unui singur număr real care exprimă măsura scalarului în raport cu o unitate.

Exemple: lungimea unui segment, aria unei suprafeţe, volumul unui corp, masa, densitatea, lucrul mecanic, etc.

Spre deosebire de acestea, mărimile vectoriale pentru a fi determinate mai au nevoie în afara măsurii intensităţilor şi de alte elemente.

Definiţie. Numim vector un segment de dreaptă ale cărui capete sunt considerate într-o ordine dată. Elementele caracteristice ale unui vector sunt:

· *direcţia* - dată de dreapta suport

· *sensul*,

· *modulul sau mărimea* adică lungimea segmentului şi

· *originea*.

Dintr-un segment elementar AB se pot construi doi vectori: $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$.

In notaţia vectorului prin două litere şi o săgeată deasupra lui $\overrightarrow{AB}$, prima literă indică originea, iar cea de a doua extremitatea vectorului. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se notează $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ şi el este un scalar.

In anumite cazuri pentru simplificarea scrierii, vectorul se notează printr-o singură literă cu săgeată deasupra: $\vec{V}$, $\vec{a}$, iar modulul: $|\vec{V}|$, $|\vec{a}|$.

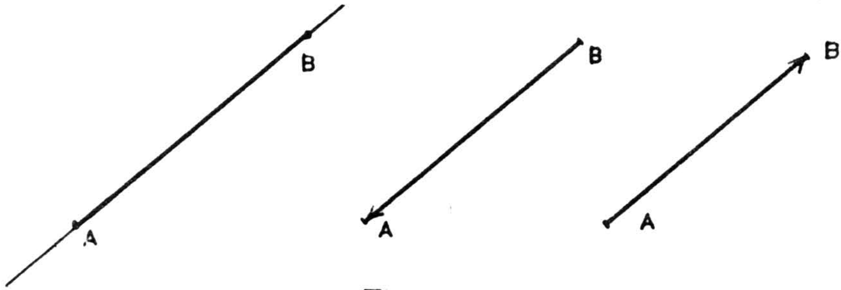


Fig. 1

In mecanică: forţa, viteza, acceleraţia reprezintă exemple de vectori.

Vectorii se împart în următoarele trei clase:

1. *Vectori ficşi* sunt vectorii cu toate cele patru caracteristici fixe.
2. *Vectori alunecători sau glisanţi* sunt vectorii care au modulul, direcţia şi sensul fixe iar originea se poate deplasa de-a lungul dreptei suport.
3. *Vectori liberi* sunt vectorii care au modulul, direcţia şi sensul fixe iar originea poate fi considerată în orice punct din spaţiu.

In tot ceea ce urmează vom studia numai vectorii liberi.

Doi vectori se numesc **paraleli** dacă au aceeaşi direcţie.

Doi vectori se numesc **egali** sau echipolenţi dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

Doi vectori se numesc **opuşi** dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi sensuri opuse. Opusul vectorului $\vec{V}$ îl vom nota $-\vec{V}$.

Se numeşte **vector nul,** vectorul care are modulul egal cu zero, iar direcţa şi sensul nedeterminate.

1.2 Operaţii cu vectori.

Adunarea vectorilor

Fie $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ doi vectori daţi.Cu originea într-un punct O din spaţiu construim vectorii egali cu vectorii $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$. **Sumă** a vectorilor $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ este vectorul $\overrightarrow{OA}$ (Fig.2) şi notăm

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \overrightarrow{OA} \tag{1.1}$$

Acest mod de sumare se numeşte **regula paralelogramului.**

Putem însă proceda şi altfel: cu originea în punctul O construim vectorul $\vec{V}_1$ iar apoi cu originea în extremitatea lui $\vec{V}_1$ construim vectorul $\vec{V}_2$.

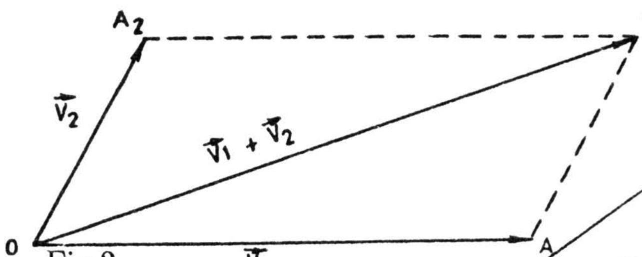


Fig.2

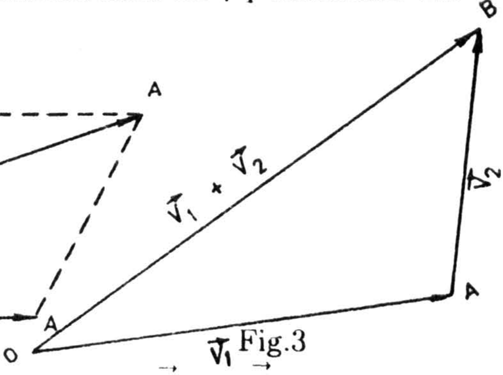


Fig.3

Se observă că în acest caz vectorul suma $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ este vectorul cu originea în originea primului vector şi extremitatea în extremitatea celui de al doilea vector. Cu alte cuvinte vectorul suma este vectorul care închide linia poligonală construită cu cei doi vectori.

Acest al doilea procedeu permite sumarea mai multor vectori dintr-o dată.

Fie $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3, \ldots.., \vec{V}_n$ n vectori daţi. Suma lor $\vec{V} = \sum_{k=1}^{n} \vec{V}_k$ este reprezentată în Fig.4.

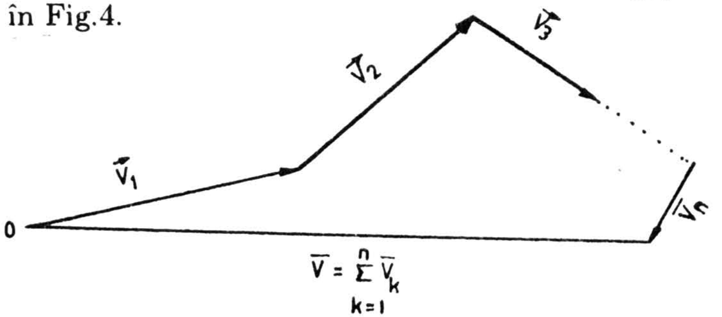


Fig.4

Proprietăţile adunării vectorilor

1. $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_2$ (comutativitatea). Această proprietate rezultă din însăşi definiţia sumei.

2. $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$ (asociativitatea)

Demonstraţia acestei proprietăţi se poate face grafic pe Fig.5.

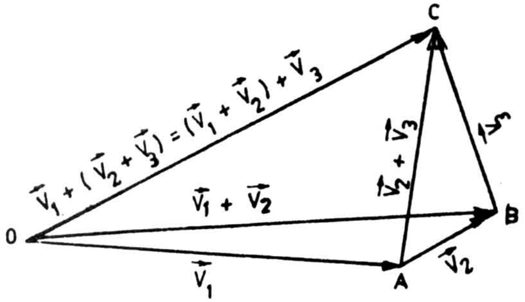


Fig.5

Observaţie. Suma a doi vectori paraleli $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ este un vector, care are aceeaşi direcţie cu vectorii $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ şi uneşte originea primului vector cu extremitatea celui de-al doilea vector.

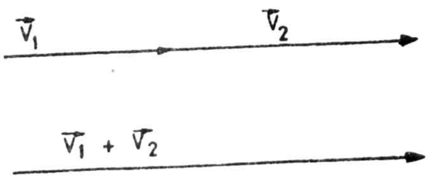


Fig.6

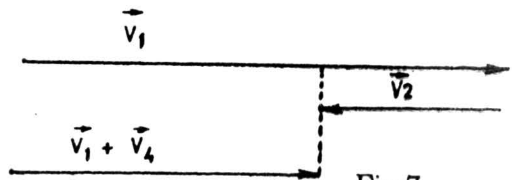


Fig.7

Dacă $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ au acelaşi sens atunci:

$$\left|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right| + \left|\vec{V}_2\right|$$

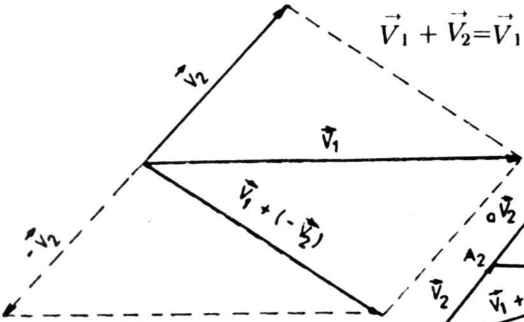
Dacă $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sunt de sens contrar şi $\left|\vec{V}_1\right| > \left|\vec{V}_2\right|$ atunci:

$$\left|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right| - \left|\vec{V}_2\right|$$

Scăderea a doi vectori

Diferenţa (Fig.8) a doi vectori înseamnă :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \left(-\vec{V}_2\right) \tag{1.2}$$



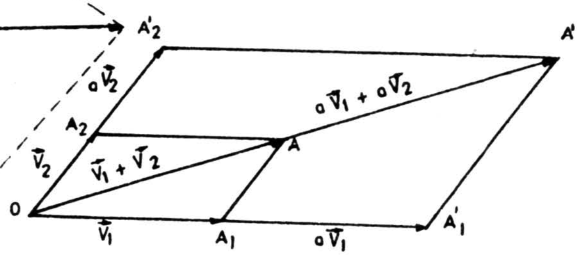


Fig.8 Fig.9

Inmulţirea dintre un scalar şi un vector.

Definiţie. Se numeşte *produs dintre scalarul a şi vectorul* $\vec{V}$ un alt vector notat $a\,\vec{V}$ care are aceeaşi direcţie cu $\vec{V}$, acelaşi sens cu $\vec{V}$ sau sens opus după cum a este pozitiv sau negativ, iar modulul este dat de relaţia:

$$\left|a\,\vec{V}\right| = |a|\left|\vec{V}\right| \tag{1.3}$$

Proprietăţi ale înmulţirii dintre un scalar şi un vector.

1. $(a+b)\,\vec{V} = a\,\vec{V} + b\,\vec{V}$

Demonstraţie. Considerăm scalarii a şi b pozitivi. Vectorii

$$a\,\vec{V}\,,\; b\,\vec{V}\,, (a+b)\,\vec{V}$$

au toţi aceeaşi direcţie şi sens cu $\vec{V}$ (Fig.9). Deci vectorii $a\,\vec{V} + b\,\vec{V}$ şi $(a+b)\,\vec{V}$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. Apoi, vectorii $a\,\vec{V}$ şi $b\,\vec{V}$ fiind paraleli şi de acelaşi sens, rezultă: $\left|a\,\vec{V} + b\,\vec{V}\right| = \left|a\,\vec{V}\right| + \left|b\,\vec{V}\right| = a\left|\vec{V}\right| + b\left|\vec{V}\right| = (a+b)\left|\vec{V}\right| = \left|(a+b)\,\vec{V}\right|$. Dacă a şi b nu sunt amândoi pozitivi demonstraţia se face în mod analog.

2. $a(\vec{V}_1 + \vec{V_2}) = a\,\vec{V}_1 + a\,\vec{V_2}$

Demonstraţie. Presupunem a > 0.

Paralelogramele construite pe vectorii $\vec{V}_1$, $\vec{V_2}$, $a\,\vec{V}_1$ şi $a\vec{V_2}$(Fig.9) sunt asemenea deoarece avem:

$$\frac{OA_1'}{OA_1} = \frac{\left|a\,\vec{V}_1\right|}{\left|\vec{V}_1\right|} = \frac{a\left|\vec{V}_1\right|}{\left|\vec{V}_1\right|} = a \text{ şi } \frac{OA_2'}{OA_2} = \frac{\left|a\,\vec{V}_2\right|}{\left|\vec{V}_2\right|} = \frac{a\left|\vec{V}_2\right|}{\left|\vec{V}_2\right|} = a$$

Rezultă că diagonalele $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OA}'$, sunt paralele, adică vectorii $\vec{V}_1 + \vec{V_2}$ şi

$a\,\vec{V}_1 + a\,\vec{V_2}$ au aceeaşi direcţie.

Insă vectorul $\vec{V}_1 + \vec{V_2}$ are aceeaşi direcţie cu vectorul $a(\vec{V}_1 + \vec{V_2})$ şi scalarul a fiind pozitiv, vectorii $a(\vec{V}_1 + \vec{V_2})$ şi $a\,\vec{V}_1 + a\,\vec{V_2}$ au acelaşi sens. Avem de asemenea:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\left|a\,\vec{V}_1 + a\,\vec{V_2}\right|}{\left|\vec{V}_1 + \vec{V_2}\right|} = \frac{a\left|\vec{V}_1 + \vec{V_2}\right|}{\left|\vec{V}_1 + \vec{V_2}\right|} = a$$

adică: $\left|a\,\vec{V}_1 + a\,\vec{V_2}\right| = a\left|\vec{V}_1 + \vec{V_2}\right|$

3. $a(b\,\vec{V}) = (ab)\,\vec{V}$

Demonstraţia se face fără nici o dificultate având în vedere proprietăţile numerelor reale.

Descompunerea unui vector

a) *Descompunerea unui vector după două direcţii concurente din acelaşi plan.*

Din extremitatea A (Fig.10) a vectorului $\vec{V}$ se duc paralele la dreptele $(\Delta_1), (\Delta_2)$ pe care le întâlnesc în punctele A_1 şi A_2.

Se consideră vectorii $\overrightarrow{OA_1} = \vec{V}_1, \overrightarrow{OA_2} = \vec{V_2}$. Rezultă $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. Vectorii $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ se numesc componente vectoriale ale vectorului $\vec{V}$ faţă de direcţiile (Δ_1) şi (Δ_2).

b) *Descompunerea unui vector după trei direcţii concurente necoplanare.* Din extremitatea A (Fig.11) a vectorului $\vec{V}$ ducem o paralelă la dreapta (Δ_3) până intersectează planul format de (Δ_1) şi (Δ_2) în A'.

Din A' se duc apoi paralele la (Δ_1) şi (Δ_2) pe care le întalnesc în A_1 şi A_2. Considerăm vectorii $\overrightarrow{OA_1}=\vec{V}_1, \overrightarrow{OA_2}=\vec{V}_2$ şi $\overrightarrow{OA_3}=\vec{V}_3$.

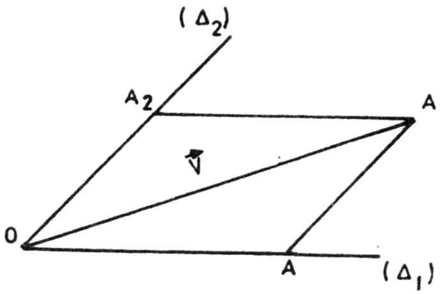


Fig.10

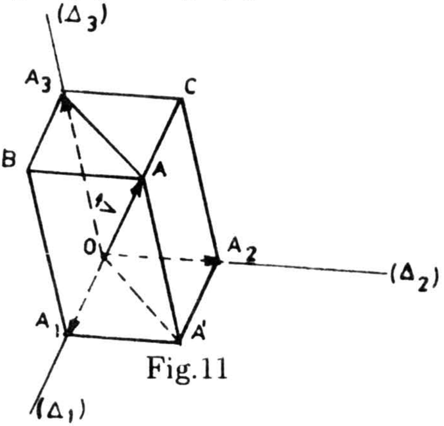


Fig.11

Rezultă: $\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$

Versorul

Versorul este un vector având modulul egal cu unitatea. Prin versor al unui vector înţelegem versorul care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul dat. Versorul vectorului $\vec{V}$ este dat de relaţia:

$$\textbf{vers}\, \vec{V}=\frac{1}{\left|\vec{V}\right|}\vec{V} \tag{1.4}$$

Coliniaritatea a doi vectori

Doi vectori se numesc *coliniari* dacă sunt situaţi pe aceeaşi dreaptă suport. Pentru vectorii liberi noţiunea de coliniaritate coincide cu noţiunea de paralelism.

Propoziţie. Dacă vectorii $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sunt coliniari atunci între ei există relaţia:

$$\alpha\, \vec{V}_1+\beta\, \vec{V}_2=0$$

unde α şi β nu sunt nuli simultan.

Demonstraţie. Avem: $vers\ \vec{V}_1=\frac{1}{\left|\vec{V}_1\right|}\vec{V}_1$ şi $vers\ \vec{V}_2=\frac{1}{\left|\vec{V}_2\right|}\vec{V}_2$ şi vectorii fiind coliniari rezultă: $vers\ \vec{V}_1 = \pm\ vers\ \vec{V}_2$ adică:

$$\frac{1}{\left|\vec{V}_1\right|}\vec{V}_1 = \pm\frac{1}{\left|\vec{V}_2\right|}\vec{V}_2$$

Fie $\alpha = \frac{1}{\left|\vec{V}_1\right|}$ şi $\beta = \pm\frac{1}{\left|\vec{V}_2\right|}$ rezultă: $\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 = 0$

Propoziţie. Dacă între doi vectori $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ există relaţia

$$\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 = 0 \tag{1.5}$$

atunci vectorii sunt coliniari.

Demonstraţie. Vectorul $\alpha\vec{V}_1$ este coliniar cu $\vec{V}_1$, iar vectorul $-\beta\vec{V}_2$ este coliniar cu $\vec{V}_2$. Cum $\alpha\vec{V}_1 = -\beta\vec{V}_2$ rezultă că vectorii $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sunt coliniari.

Observaţie. Dacă doi vectori $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sunt coliniari atunci există un scalar a astfel încât $\vec{V}_1 = a\vec{V}_2$.

Coplanaritatea a trei vectori

Propoziţie. Dacă trei vectori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ şi $\vec{V}_3$ sunt coplanari

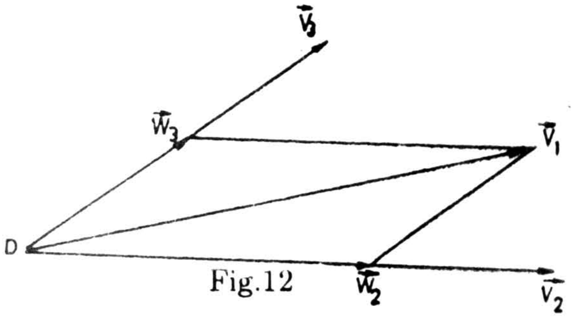


Fig.12

atunci există trei scalari α, β, γ nu toţi nuli astfel încât:

$$\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 = 0$$

Demonstraţie. Vectorii $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ fiind coplanari (Fig.12) putem de exemplu descompune pe $\vec{V}_1$ după direcţiile vectorilor $\vec{V}_2$ şi $\vec{V}_3$. Avem: $\vec{V}_1 = \vec{W}_2 + \vec{W}_3$

Insă $\vec{W}_2$ este coliniar cu $\vec{V}_2$ şi în baza observaţiei de mai sus există un scalar $\frac{-\beta}{\alpha}$ astfel încât $\vec{W}_2 = \frac{-\beta}{\alpha}\vec{V}_2$. Analog obţinem $\vec{W}_3 = -\frac{\gamma}{\alpha}\vec{V}_3$. Deci:

$$\vec{V}_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{V}_2 - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{V}_3$$

de unde deducem relaţia din enunţ.

Propoziţie. Dacă între trei vectori $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ există relaţia:

$$\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 = 0 \qquad (1.6)$$

atunci vectorii sunt *coplanari*.

In baza definiţiei sumei vectoriale, vectorul:

$$\vec{V}_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{V}_2 - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{V}_3$$

este situat în planul vectorilor: $\frac{-\beta}{\alpha}\vec{V}_2$ şi $-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{V}_3$ adică în planul vectorilor $\vec{V}_2$ şi $\vec{V}_3$.

Proiecţia unui vector pe o axă

Prin axă întelegem o dreaptă pe care s-a stabilit un sens pozitiv de parcurgere a punctelor sale. Vectorial o axă este caracterizată de un versor.

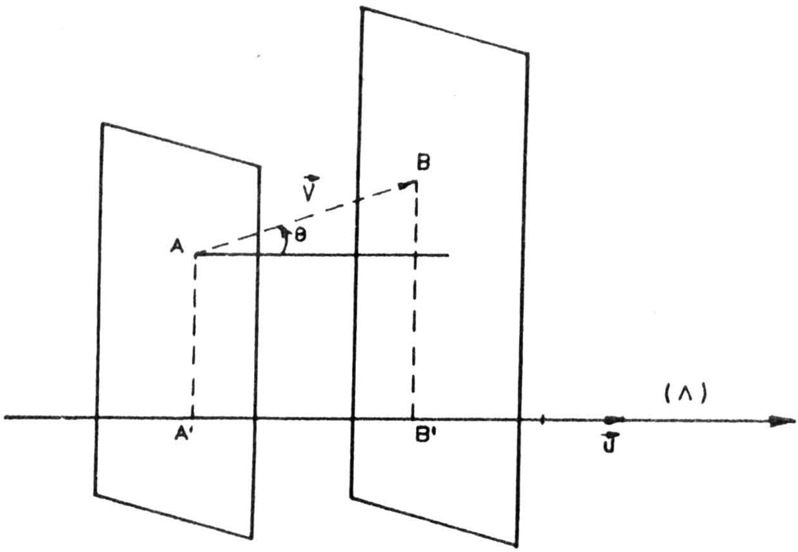


Fig.13

Numim **unghi**, a doi vectori $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ unghiul mai mic sau egal cu π format de sensurile lor pozitive pe care-l notăm astfel $(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$. Fie vectorul $\vec{AB}=\vec{V}$ şi axa (Δ) de versor $\vec{u}$ (Fig.13).

Definiţie. Numim *proiecţie* a vectorului $\vec{V}$ pe axa (Δ) un scalar egal cu produsul dintre modulul vectorului $\vec{V}$ şi cosinusul unghiului format de $\vec{V}$ cu axa (Δ). Notăm:

$$pr_{(\Delta)}\,\vec{V}=\left|\vec{V}\right| cos(\widehat{\vec{V},(\Delta)}) \quad \text{sau} \quad pr_{\vec{u}}\,\vec{V}=\left|\vec{V}\right| cos(\widehat{\vec{V},\vec{u}}) \qquad (1.7)$$

Se observă că proiecţia unui vector pe o axă este un scalar pozitiv sau negativ, după cum unghiul $\theta = \left(\widehat{\vec{V},(\Delta)}\right)$ este cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2}$ respectiv între $\frac{\pi}{2}$ şi π.

Expresia analitică a vectorilor

Să considerăm trei drepte$(\Delta_1),(\Delta_2),(\Delta_3)$, concurente, ortogonale două câte două.

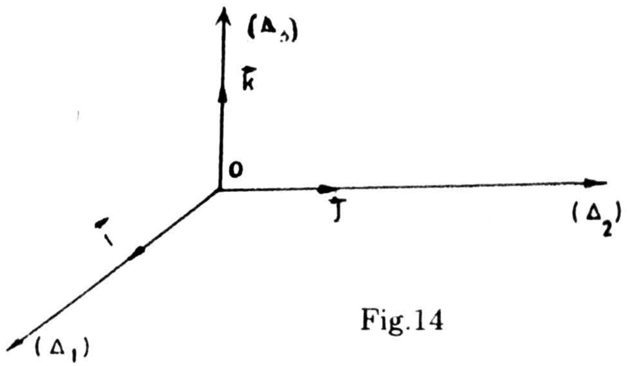


Fig.14

Orientăm aceste drepte cu ajutorul vectorilor $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, astfel încât triedrul $O(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ să fie direct, adică un observator situat de-a lungul versorului $\vec{k}$ cu capul în sensul lui $\vec{k}$ să observe suprapunerea versorului $\vec{i}$, peste $\vec{j}$, de la dreapta spre stânga după un unghi de 90^0. Figura geometrică astfel construită se numeşte *reper cartezian ortogonal.*

Să considerăm un reper cartezian ortogonal şi un punct M în spaţiu (Fig.15).

Vectorul $\vec{OM}$ se numeşte vector de poziţie al punctului M. Descompunem vectorul $\vec{OM}$ după direcţiile axelor Ox, Oy, Oz.

Obţinem: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2+\overrightarrow{OM}_3$. Insă $\overrightarrow{OM}_1$ fiind coliniar cu $\vec{i}$ există un scalar x astfel încât $\overrightarrow{OM}_1=x\,\vec{i}$. Analog pentru $\overrightarrow{OM}_2$ şi $\overrightarrow{OM}_3$, $\overrightarrow{OM}_2=y\,\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}_3=z\,\vec{k}$. Vectorul de poziţie va fi:

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

Descompunerea astfel obţinută se numeşte *expresia analitică a vectorului* $\overrightarrow{OM}$. Scalarii x,y,z se numesc coordonatele punctului M şi notăm $M(x,y,z)$. Fiecărui punct M din spaţiu îi corespunde în mod biunivoc un triplet ordonat de numere reale, coordonatele punctului $M(x,y,z)$.

Să considerăm acum un vector oarecare $\vec{V}$ în spaţiu determinat de coordonatele extremităţilor sale $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ (Fig.16)

Avem: $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ dar $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

Insă $\overrightarrow{OA}=x_1\,\vec{i}+y_1\,\vec{j}+z_1\,\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=x_2\,\vec{i}+y_2\,\vec{j}+z_2\,\vec{k}$

Deci: $\vec{V}=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}$;

sau notând $X=(x_2-x_1)$; $Y=(y_2-y_1)$; $Z=(z_2-z_1)$, putem scrie:

$$\vec{V}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}+Z\,\vec{k}$$

X,Y,Z se numesc componentele scalare ale vectorului $\vec{V}$.

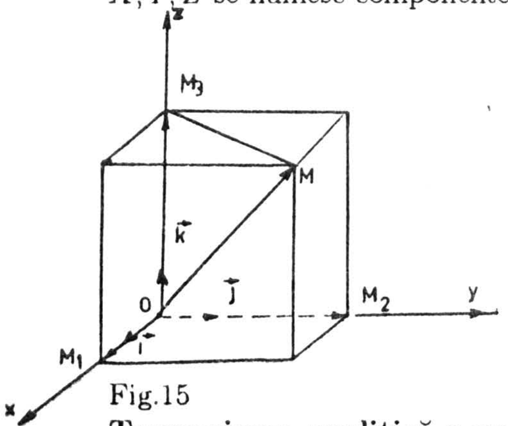


Fig.15

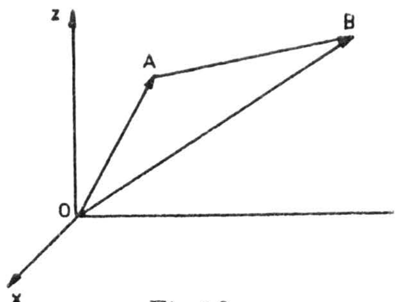


Fig.16

Transcrierea analitică a operaţiilor studiate.

Fie doi vectori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ daţi prin expresiile lor analitice:

$\vec{V}_1=x_1\,\vec{i}+y_1\,\vec{j}+z_1\,\vec{k}$ şi $\vec{V}_2=x_2\,\vec{i}+y_2\,\vec{j}+z_2\,\vec{k}$

1. Dacă $\vec{V}_1=\vec{V}_2$, atunci $x_1\,\vec{i}+y_1\,\vec{j}+z_1\,\vec{k}=x_2\,\vec{i}+y_2\,\vec{j}+z_2\,\vec{k}$

ceea ce este echivalent cu $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$.

2. Dacă $\vec{V_1} = a\,\vec{V_2}$ atunci $x_1 = ax_2, y_1 = y_2,\ z_1 = az_2$.

3. Dacă $\vec{V_1} \parallel \vec{V_2}$ atunci există un scalar α astfel încât $\vec{V_1} = \alpha\,\vec{V_2}$,

   $x_1 = \alpha x_2,\ y_1 = \alpha y_2,\ z_1 = \alpha z_2$ de unde deducem:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

4. Dacă $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ şi notăm $\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ atunci deducem:

$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) + (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k})$
$x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ z = z_1 + z_2$.

Mai general dacă avem $\vec{V_p} = x_p\,\vec{i} + y_p\,\vec{j} + z_p\,\vec{k}$ cu $p \in \{1, 2, ..., n\}$ n vectori şi construim suma:

$$\vec{V} = \sum_{p=1}^{n} \vec{V_p}$$

atunci obţinem:

$$x = \sum_{p=1}^{n} x_p;\ y = \sum_{p=1}^{n} y_p;\ z = \sum_{p=1}^{n} z_p$$

Insă: $x = pr_{\vec{i}}\,\vec{V}$ şi $x_p = pr_{\vec{i}}\,\vec{V_p}$ cu $p \in \{1, 2, ..., n\}$.

Deci: $pr_{\vec{i}}\,\vec{V} = \sum_{p=1}^{n} pr_{\vec{i}}\,\vec{V_p}$

sau încă:

$$pr_{\vec{i}}\left(\sum_{p=1}^{n} \vec{V_p}\right) = \sum_{p=1}^{n} pr_{\vec{i}}\,\vec{V_p}$$

Analog pentru celelalte axe. Mai general mai putem scrie:

$$pr_{(\Delta)}\left(\sum_{p=1}^{n} \vec{V_p}\right) = \sum_{p=1}^{n} pr_{(\Delta)}\,\vec{V_p} \tag{1.8}$$

unde (Δ) este o axă oarecare. Am obţinut astfel:

Teorema proiecţiei

Proiecţia unei sume vectoriale pe o axă (Δ) este egală cu suma proiecţiilor vectorilor pe axa (Δ).

Raportul în care un punct împarte un segment dat.

Coordonatele unui punct $M(x,y)$ care împarte un segment M_1M_2 într-un raport dat λ .

Fie: $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ adică $M_1M = \lambda MM_2$ (Fig. 17) de unde deducem că: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\ \overrightarrow{MM_2}$. Insă:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\ \vec{i} + (y - y_1)\ \vec{j} + (z - z_1)\ \vec{k}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\ \vec{i} + (y_2 - y)\ \vec{j} + (z_2 - z)\ \vec{k}$$

şi înlocuind în relaţia de mai sus :

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x);\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y);\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (1.9)$$

In particular coordonatele mijlocului unui segment sunt:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (1.10)$$

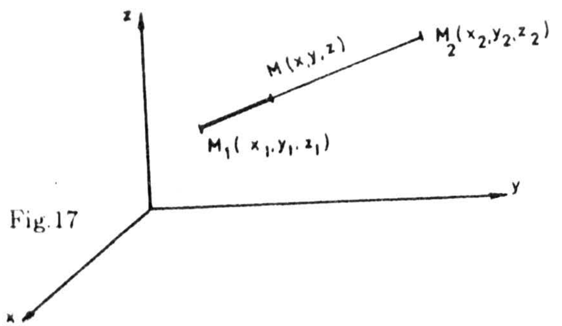


Fig.17

Fig.18

1.3 Produsul scalar

Definiţie. **Produsul scalar** a doi vectori $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ notat $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$, este un scalar egal cu produsul modulelor vectorilor prin cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = |\vec{V_1}||\vec{V_2}| \cos \left(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}} \right) \tag{1.11}$$

Proprietăţi ale produsului scalar

1) Produsul scalar este nul în următoarele situaţii:

a) $\vec{V_1} = 0$ sau $\vec{V_2} = 0$ sau $\vec{V_1} = 0$ şi $\vec{V_2} = 0$

b) $\vec{V_1} \neq 0, \vec{V_2} \neq 0$

însă $\cos(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \frac{\pi}{2}$

Deci, condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori să fie ortogonali este ca produsul lor scalar să fie nul.

2) Putem scrie (Fig.18) : $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right| \left(\left|\vec{V_2}\right| \cos \alpha \right)$ adică:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \left|\vec{V_1}\right| \left(pr_{\vec{V_1}} \vec{V_2} \right) \tag{1.12}$$

Se deduce că :

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \left|\vec{V_2}\right| \left(pr_{\vec{V_2}} \vec{V_1} \right) \tag{1.13}$$

Concluzia: *Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia din ei şi proiecţia celuilalt pe el.*

In particular dacă $\vec{V_2} = \vec{u}$, unde $\vec{u}$ este versor $\left(\left|\vec{u}\right| = 1 \right)$, obţinem:

$\vec{V}_1 \cdot \vec{u} = \left|\vec{V_1}\right| \cos\alpha$.

Adică: *proiecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vectorul dat şi versorul axei.*

$$pr_{\vec{u}} \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{u} \tag{1.14}$$

3) $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = \vec{V_2} \cdot \vec{V_1}$ (comutativitatea)

4) $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$ (distributivitatea produsului scalar faţă de suma vectorială).

Demonstrație. Avem succesiv:

$$\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}+\vec{V_3})=\left|\vec{V_1}\right|\left(pr_{\vec{V_1}}(\vec{V_2}+\vec{V_3})\right)=\left|\vec{V_1}\right|\left(pr_{\vec{V_1}}\vec{V_2}+pr_{\vec{V_1}}\vec{V_3}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}+\vec{V_3})=\left|\vec{V_1}\right|\left(pr_{\vec{V_1}}\vec{V_2}\right)+\left|\vec{V_1}\right|\left(pr_{\vec{V_1}}\vec{V_3}\right)=\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}+\vec{V_1}\cdot\vec{V_3}$$

5) $(a\vec{V_1})\cdot(b\vec{V_2})=(ab)(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2})$

Demonstrația se face fără nici o dificultate. Se deduce că

$$\vec{V}\cdot\vec{V}=\left|\vec{V}\right|^2 => \left|\vec{V}\right|=\sqrt{\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right)} \tag{1.15}$$

Expresia analitică a produsului scalar.

Mai întâi să observăm că:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

Fie: $\vec{V_1}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$ și $\vec{V_2}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$

Avem succesiv:

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\cdot(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k})$$

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\cdot(X_2\vec{i})+(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\cdot$$
$$\cdot(Y_2\vec{j})+(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\cdot(Z_2\vec{k})$$

Deci:

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \tag{1.16}$$

In particular pentru $\vec{V_1}=\vec{V_2}=\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ avem: $\vec{V}\cdot\vec{V}=X^2+Y^2+Z^2$ deci

$$\left|\vec{V}\right|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \tag{1.17}$$

Aplicație. Să calculăm distanța dintre două puncte $M_1(X_1,Y_1,Z_1)$ și $M_2(X_2,Y_2,Z_2)$. Avem: $\overrightarrow{M_1M_2}=(X_2-X_1)\vec{i}+(Y_2-Y_1)\vec{j}+(Z_2-Z_1)\vec{k}$ de unde:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2} \tag{1.18}$$

Din definiţia produsului scalar a doi vectori deducem:

$$cos\left(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}}\right)=\frac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|}$$

care are următoarea expresie analitică:

$$cos\left(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}}\right)=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{1.19}$$

Pentru **condiţia de ortogonalitate** a doi vectori avem:

$$\vec{V_1}\perp\vec{V_2} <=> X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0 \tag{1.20}$$

Dacă notăm cu α,β,γ unghiurile pe care le face vectorul $\vec{V}=X\ \vec{i}$ $+Y\ \vec{j}+Z\ \vec{k}$ cu axele de coordonate, atunci:

$$\cos\alpha=\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{i}}\right)=\frac{\vec{V}\cdot\vec{i}}{\left|\vec{V}\right|\left|\vec{i}\right|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$
$$\cos\beta=\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{j}}\right)=\frac{\vec{V}\cdot\vec{j}}{\left|\vec{V}\right|\left|\vec{j}\right|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$
$$\cos\gamma=\cos\left(\widehat{\vec{V},\vec{k}}\right)=\frac{\vec{V}\cdot\vec{k}}{\left|\vec{V}\right|\left|\vec{k}\right|}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

de unde deducem:

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1 \tag{1.21}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc **cosinuşii directori** ai vectorului $\vec{V}$.

Versorul $\vec{u}$ al vectorului $\vec{V}$ este:

$$\begin{gathered}\vec{u}=\frac{1}{\left|\vec{V}\right|}\vec{V}=\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(X\ \vec{i}+Y\ \vec{j}+Z\ \vec{k}\right)\\ \vec{u}=cos\alpha\ \vec{i}+cos\beta.\vec{j}+cos\gamma\ \vec{k}\end{gathered} \tag{1.22}$$

1.4 Produsul vectorial

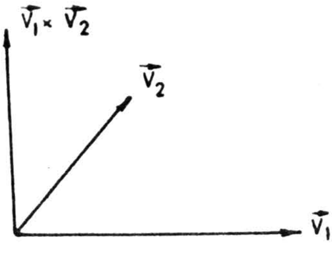


Fig.19

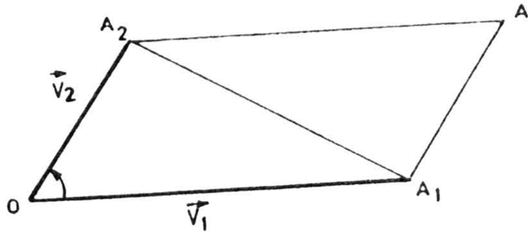


Fig.20

Definiţie. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, consideraţi în această ordine, este un vector notat $\vec{V_1} \times \vec{V_2}$, perpendicular pe vectorii $\vec{V_1}$ şi $\vec{V_2}$, orientat astfel încât triedrul $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_1} \times \vec{V_2}$ să fie direct (Fig.19).

Modulul este dat de relaţia:

$$\left|\vec{V_1} \times \vec{V_2}\right| = \left|\vec{V_1}\right| \left|\vec{V_2}\right| sin(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}) \tag{1.23}$$

Proprietăţile produsului vectorial

1) Modulul produsului vectorial este un scalar reprezentând **aria paralelogramului** (Fig.20) **construit pe cei doi vectori.**

$$aria\ \Delta_{OA_1A_2} = \frac{\left|\vec{OA_1}\right| \left|\vec{OA_2}\right| sin(\widehat{\vec{OA_1}, \vec{OA_2}})}{2}$$

De unde deducem: aria paralelogramului

$$\mathcal{A}_{OA_1AA_2} = \mid \vec{V_1} \times \vec{V_2} \mid . \tag{1.24}$$

Pentru **aria unui triunghi** ABC avem formula :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\mid \vec{AB} \times \vec{AC} \mid}{2} \tag{1.25}$$

2) Produsul vectorial se anulează în următoarele situaţii:

- $\vec{V_1} = 0$ sau $\vec{V_2} = 0$ sau $\vec{V_1} = \vec{V_2} = 0$.

- $sin(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}) = 0 \Rightarrow \left(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}\right) = 0$ sau $\left(\widehat{\vec{V_1}, \vec{V_2}}\right) = \pi$

  Criteriul de paralelism: Doi vectori sunt paraleli dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este nul.

- $\vec{V_1} \times \vec{V_2} = -(\vec{V_2} \times \vec{V_1})$ (anticomutativitate).

  Demonstraţia rezultă din Fig.21.

- $(a\,\vec{V_1}) \times (b\,\vec{V_2}) = (ab)(\vec{V_1} \times \vec{V_2})$. Demonstraţia se face fără dificultate, considerând mai întâi cazul $a > 0, b = 1$ şi apoi celelalte situaţii.

- $\vec{V_1} \times (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \times \vec{V_2} + \vec{V_1} \times \vec{V_3}$ (distributivitatea produsului vectorial faţă de suma vectorială).

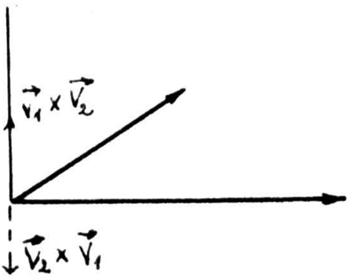


Fig.21

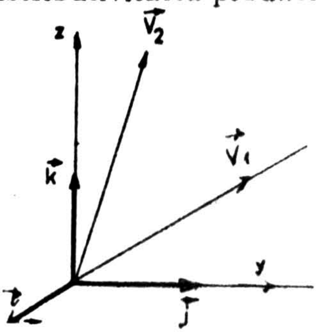


Fig.22

Expresia analitică a produsului vectorial

Pentru versorii axelor de coordonate $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (Fig.22) avem:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}\ .$$

Fie: $\vec{V_1} = X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k}$ şi $\vec{V_2} = X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k}$
doi vectori daţi prin expresiile analitice.
Avem succesiv:

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = (X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k}) \times (X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k}) =$$
$$= (X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k}) \times (X_2\,\vec{i}) + (X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k}) \times (Y_2\,\vec{j}) +$$
$$+ (X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k}) \times (Z_2\,\vec{k})$$

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2}=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\,\vec{i}-(X_1Z_2-X_2Z_1)\,\vec{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\,\vec{k}$$

Expresia analitică a produsului vectorial o putem scrie în mod convenţional sub forma:

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix} \tag{1.26}$$

1.5 Produsul mixt

Definiţie. Produsul mixt a trei vectori $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$, consideraţi în această ordine, este *un scalar* egal cu produsul scalar dintre vectorii $\vec{V_1}$ şi $\vec{V_2}\times\vec{V_3}$, adică:

$$\vec{V_1}\cdot\left(\vec{V_2}\times\vec{V_3}\right) \tag{1.27}$$

Semnificaţia geometrică a produsului mixt

$$\left|\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\times\vec{V_3})\right|=\left|\vec{V_2}\times\vec{V_3}\right|\left|pr_{\vec{V_2}\times\vec{V_3}}\vec{V_1}\right|=\mathcal{A}_b\cdot\mathcal{I}=\mathcal{V}_p$$

Valoarea absolută a produsului mixt este egală cu volumul paralelipipedului (Fig.23) construit pe cei trei vectori.

$$\mathcal{V}_p=\left|\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}\times\vec{V_3})\right| \tag{1.28}$$

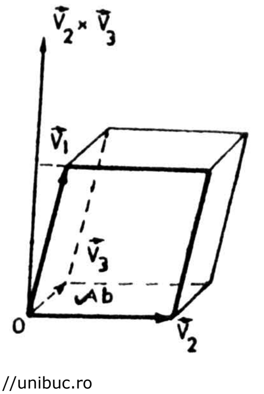


Fig.23

Expresie analitică a produsului mixt.

Fie $\vec{V_m} = X_m \vec{i} + Y_m \vec{j} + Z_m \vec{k}$, $m \in \{1,2,3\}$ trei vectori daţi. Avem succesiv :

$$\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \times \vec{V_3}) = \left(X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}\right) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

sau :

$$\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \times \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

Proprietăţile produsului mixt

1. $\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \times \vec{V_3}) = \vec{V_2} \cdot (\vec{V_3} \times \vec{V_1}) = \vec{V_3} \cdot (\vec{V_1} \times \vec{V_2})$

2. $(a \vec{V_1}) \cdot [(b \vec{V_2}) \times (c \vec{V_3})] = (abc) \cdot [\vec{V_1} (\vec{V_2} \times \vec{V_3})]$

3. $\vec{V_1} \cdot [\vec{V_2} \times (\vec{V_3} + \vec{V_3})] = \vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \times \vec{V_3}) + \vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} \times \vec{V_3})$

4. $\vec{V_1} (\vec{V_2} \times \lambda \vec{V_2}) = 0, \lambda \in \mathbf{R}$

5. Trei vectori $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ sunt **coplanari** dacă şi numai dacă produsul mixt este nul, adică:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.30}$$

1.6 Dublul produs vectorial

Definiţie. Dublul produs vectorial a trei vectori $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ consideraţi în această ordine, este un vector $\vec{V}$ dat de egalitatea: $\vec{V} = \vec{V_1} \times (\vec{V_2} \times \vec{V_3})$

Vectorii $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ fiind daţi, construim un reper cartezian ortogonal particular (Fig.24) luând drept axa Ox axa determinată de $\vec{V_2}$ apoi Oy în planul determinat de $\vec{V_2}$ şi $\vec{V_3}$.

Faţă de acest reper vectorii au următoarele expresii analitice :

$$\vec{V_1}= X_1\ \vec{i}\ +Y_1\ \vec{j}\ +Z_1\ \vec{k};\ \vec{V_2}= X_2\ \vec{i};\ \vec{V_3}= X_3\ \vec{i}\ +Y_3\ \vec{j}$$

Avem succesiv :

$$\vec{V_2}\times\vec{V_3}= X_2Y_3\ \vec{k}$$
$$\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) = (X_1\ \vec{i}\ +Y_1\ \vec{j}\ +Z_1\ \vec{k})\times(X_2Y_3\ \vec{k}) =$$
$$= -X_1X_2Y_3\ \vec{j}\ +Y_1X_2Y_3\ \vec{i}$$

Insă $X_2\left(Y_3\ \vec{j}\right) = X_2\ \vec{V_3} - X_2X_3\ \vec{i} = X_2\ \vec{V_3} - X_3\ \vec{V_2}$

deci :

$$\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) = -X_1(X_2\ \vec{V_3} - X_3\ \vec{V_2}) + Y_1Y_3\ \vec{V_2} =$$
$$= (X_1X_3 + Y_1Y_3)\ \vec{V_2} - X_1X_2\ \vec{V_3}$$

Cum $X_1X_3 + Y_1Y_3 = \vec{V_1}\cdot\vec{V_3}$; $X_1X_2 = \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ deducem :

$$\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) = (\vec{V_1}\cdot\vec{V_3})\ \vec{V_2} - (\vec{V_1}\cdot\vec{V_2})\ \vec{V_3} \tag{1.31}$$

egalitate care constituie formula de descompunere a dublului produs vectorial.

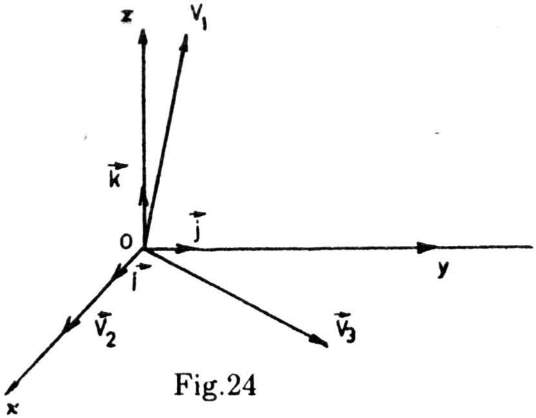


Fig.24

Se observă că dublul produs vectorial este un vector *coplanar* cu vectorii $\vec{V_2}$ şi $\vec{V_3}$.

1.7 EXERCIŢII

1. Care este condiţia pe care trebuie să o satisfacă trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, pentru ca ei să formeze un triunghi ?

2. Să se demonstreze că medianele unui triunghi dat ABC pot fi laturile unui triunghi.

3. Să se demonstreze pe cale vectorială teorema liniei mijlocii dintr-un triunghi.

4. Să se demonstreze pe cale vectorială teorema cosinusului.

5. Să se calculeze pe cale vectorială medianele unui triunghi în funcţie de laturi.

6. Să se demonstreze pe cale vectorială că dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte neparalele dintr-un plan atunci aceea dreaptă este perpendiculară pe plan.

7. Să se arate că într-un paralelogram ABCD în care O este punctul de intersecţie a diagonalelor şi M un punct oarecare, avem, relaţiile:

$$a)\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}= MO^2-\tfrac{AC^2}{4}$$
$$b)\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}= MO^2-\tfrac{BD^2}{4}$$
$$c)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}) = 4MO^2-BC^2$$
$$d)(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\cdot(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}) = 4MO^2-AB^2$$

8. Să se demonstreze pe cale vectorială teorema sinusurilor.

9. Se dau punctele $A(1,0,a), B(-1,2,0), C(1,2,-2), D(1,2,4)$.Se cere:

   a) Să se figureze punctele A, B, C, D.

   b) Să se afle perimetrul triunghiului ABC.

   c) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC.

   d) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

   e) Să se afle înălţimile triunghiului ABC.

f) Să se determine versorul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

g) Să se determine proiecţia vectorului $\overrightarrow{AD}$ pe $\overrightarrow{AB}$.

h) Să se afle volumul tetraedrului ABCD.

i) Să se afle distanţa punctului D la planul ABC.

j) Să se calculeze vectorul $\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})$

10. Să se determine α astfel încât vectorii:

$$\begin{aligned}\vec{V_1}&=3\,\vec{i}+\alpha\,\vec{j}-2\,\vec{k}\\ \vec{V_2}&=-\,\vec{i}+4\,\vec{j}+2\,\vec{k}\\ \vec{V_3}&=2\,\vec{i}+5\,\vec{j}+6\,\vec{k}\end{aligned}$$

să fie coplanari.

11. Să se arate că dacă $\vec{c}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}$, atunci $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

12. Se dau punctele $A(0,0,1)$, $B(2,4,1)$. Să se determine un punct C,

situat în planul xOy astfel încât triunghiul ABC să aibă aria egală cu $\sqrt{5}u^2$ iar unghiul din A egal cu 60^0.

13. Se dau puncteleA$(0,1,1)$, $B(2,1,3)$. Să se determine un punct C pe prima bisectoare a unghiului xOy, astfel încât triunghiului ABC să fie dreptunghic în A.

14. Se dau puncteleA$(-2,-14,-5)$, $B(10,-5,10)$, $C(-11,-2,10)$. Să se arate

că vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ formează muchiile unui cub.

15. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori neparaleli şi $\vec{V}$ un vector paralel cu planul format de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Să se arate că:

$$\vec{V}=\frac{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{V}\times\vec{b}\right)}{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2}\,\vec{a}+\frac{\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{V}\times\vec{a}\right)}{\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)^2}\,\vec{b}$$

16. Să se demonstreze că trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, formează laturile unui triunghi dacă şi numai dacă:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times a$$

17. Să se arate că vectorii $(\vec{V_2} \cdot \vec{V_3})\ \vec{V_1} - (\vec{V_3} \cdot \vec{V_1})\ \vec{V_2}$ şi $\vec{V_3}$ sunt ortogonali.

18. In ce caz suma şi diferenţa a doi vectori sunt vectori ortogonali ?

19. Să se calculeze $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

20. Ştiind că $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, să se calculeze:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

21. Să se demonstreze, vectorial, că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

22. Să se demonstreze, vectorial, că medianele unui triunghi sunt concurente şi să se determine vectorul de poziţie al punctului de concurenţă.

23. Să se demonstreze, vectorial, că bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente.

24. Să se stabilească vectorial formula pentru $cos(a + b)$ şi $sin(a + b)$.

25. Se dă o sferă cu centrul O, de rază R şi P, P' două puncte de pe sferă, diametral opuse. Să se arate că oricare ar fi punctul M din spaţiu avem :

$$MP \cdot MP' = MO^2 - R^2.$$

Capitolul 2

PLANUL ŞI DREAPTA

2.1 P L A N U L

Ecuaţia unui plan determinat de trei puncte

Fie $M_k(x_k, y_k, z_k)$ unde $k \in \{1, 2, 3\}$ trei puncte din spaţiu. Ele determină un plan (P). Să mai considerăm în planul (P) un punct oarecare $M(x, y, z)$.

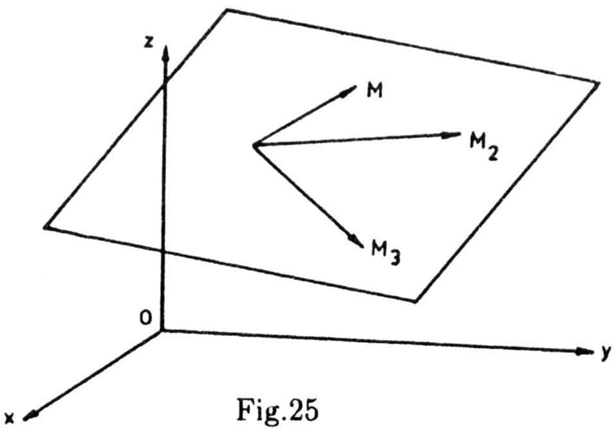


Fig.25

Vectorii $\overrightarrow{M_3M}$, $\overrightarrow{M_3M_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt situaţi în planul P, deci:

$$\overrightarrow{M_3M} \cdot \left(\overrightarrow{M_3M_1} \times \overrightarrow{M_1M_2} \right) = 0$$

adică:

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

Determinantul din ecuaţia (2.1) provine însă din dezvoltarea următorului determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

Relaţia (2.2) reprezintă **ecuaţia planului determinat de trei puncte**.
Să considerăm cazul particular când punctele sunt situate pe axele de coordonate, adică $M_1(p,o,o)$, $M_2(o,q,o)$, $M_3(o,o,r)$. Inlocuind în (2.2) obţinem:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 & 1 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care dezvoltat ne dă:

$$qrx - pqr + rpy + pqz = 0$$

sau încă:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0 \tag{2.3}$$

(2.3) reprezintă **ecuaţia planului prin tăieturi** p, q, r sunt tăieturile planului pe axele de coordonate. Condiţia de coplanaritate a patru puncte $M_k(x_k, y_k, z_k)$ unde $k \in \{1,2,3\}$ se obţine din ecuaţia (2.2) înlocuind pe x, y, z cu x_4, y_4, z_4. După o schimbare convenabilă de linii condiţia de coplanaritate se scrie:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

Ecuaţia generală a planului

Dezvoltând determinantul din ecuaţia (2.2) după elementele primei linii obţinem:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

care poate fi scrisă sub forma :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.5}$$

unde A, B, C, D sunt determinanţii din ecuaţia anterioară cu semnele lor.

Relaţia (2.5) reprezintă **ecuaţia generală a planului.**

Se observă că ecuaţia generală a unui plan este o ecuaţie de gradul unu în variabilele x, y, z.

Reciproc : figura geometrică formată din mulţimea punctelor M(x,y,z) din spaţiu ale căror coordonate verifică ecuaţia (2.5) este un plan. Intradevăr, fie $M_k(x_k, y_k, z_k)$ unde $k \in \{1,2,3\}$ patru puncte oarecare care verifică ecuaţia (2.5) adică:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

poate fi interpretat ca un sistem omogen de patru ecuaţii cu patru necunoscute A,B,C,D. Cum coeficienţii ecuaţiei (2.5) nu pot fi toţi nuli, rezultă că sistemul (2.6) admite şi soluţii nebanale, deci:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

care este tocmai condiţia de coplanaritate a celor patru puncte.

Planul determinat de un punct şi un vector director .

Numim vector director al unui plan orice vector nenul perpendicular pe plan.

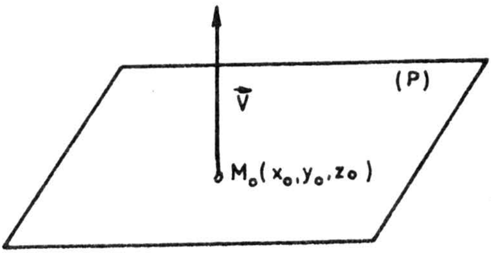


Fig.26

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct dat şi $\vec{V} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ un vector dat. Să determinăm ecuaţia planului determinat de M_0 si $\vec{V}$. Considerăm un punct oarecare $M(x, y, z) \in (P)$. Vectorii $\vec{V}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$ sunt ortogonali, deci:

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

adică:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{2.7}$$

care constituie **ecuaţia planului determinat de un punct şi un vector director**. Dezvoltând obtinem : $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$. Comparând această ecuaţie cu ecuaţia generală a planului (2.5), se observă că coeficienţii variabilelor din ecuaţia generală a unui plan reprezintă componentele scalare ale vectorului director al planului.

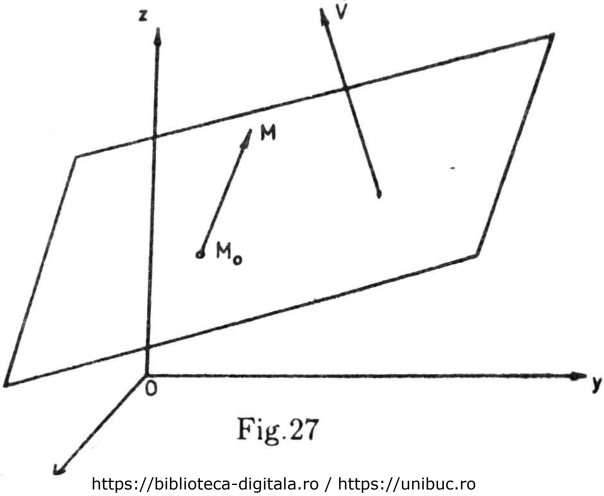


Fig.27

Ecuaţii de plane în poziţii particulare faţă de sistemul de axe.

Fie (P) un plan dat prin ecuaţia sa generală:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

având vectorul director $\vec{V} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$

Vom considera unele poziţii particulare ale planului P faţă de sistemul de axe.

a) Dacă $A = 0$, atunci $\vec{V} = B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ şi $\vec{V} \perp \vec{i}$, adică $(P) \parallel Ox$ şi ecuaţia planului devine: $By + Cz + D = 0$. De aici deducem că dacă în ecuaţia generală a unui plan lipseşte o variabilă atunci planul este paralel cu axa a cărei variabilă lipseşte.

b) Dacă $A = B = 0$, atunci $\vec{V} = C\,\vec{k}$ şi $\vec{V} \perp xOy$, adică $(P) \parallel xOy$ iar ecuaţia planului este $Cz + D = 0$. Deci dacă în ecuaţia unui plan lipsesc două variabile atunci planul este paralel cu planul format de axele celor două variabile.

c) Dacă $D = 0$, atunci $O(o, o, o) \in (P)$ şi ecuaţia planului este

$$Ax + By + Cz = 0.$$

d) Dacă $A = D = 0$, atunci $Ox \in (P)$ şi ecuaţia planului este $By + Cz = 0$.

e) Dacă $A = B = D = 0$, atunci planul (P) este paralel cu planul xOy şi trece prin origine, deci (P) coincide cu planul xOy, iar ecuaţia sa este $Cz = 0$ sau $z = 0$. In concluzie avem : $x = 0$ ecuaţia planului yOz, $y = 0$ ecuaţia planului xOz, $z = 0$ ecuaţia planului xOy

Paralelismul, ortogonalitatea şi unghiul a două plane.

Fie planele:

$$(P_1): \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi}$$
$$(P_2): \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

având vectorii directori:

$$\vec{V_1} = A_1\,\vec{i} + B_1\,\vec{j} + C_1\,\vec{k} \text{ şi}$$
$$\vec{V_2} = A_2\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + C_2\,\vec{k}$$

$$(P_1) \parallel (P_2) \Leftrightarrow \vec{V_1} \parallel \vec{V_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2.2 DREAPTA

Dreapta determinată ca intersectie a două plane

Două plane neparalele:

$$(P_1): \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi}$$
$$(P_2): \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

determină o dreaptă (Δ), ale cărei ecuaţii sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Numim **vector director** al unei drepte orice vector nenul paralel cu dreapta.

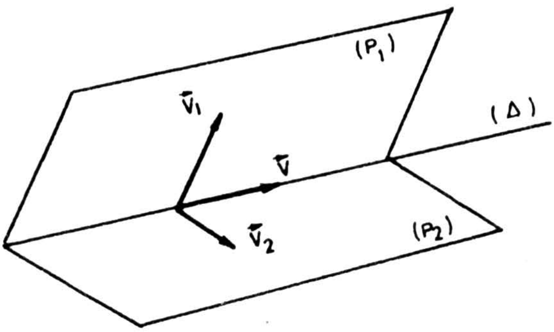


Fig.28

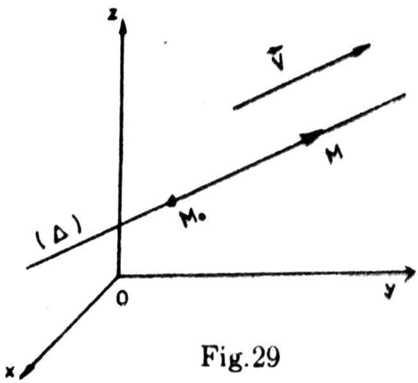


Fig.29

Notând:

$$\vec{V_1} = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j} + C_1 \vec{k} \text{ şi}$$
$$\vec{V_2} = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j} + C_2 \vec{k}$$

vectorii directori ai planelor (P_1) şi (P_2) iar cu $\vec{V}$ vectorul director al dreptei (Δ), din Fig. 28 se vede că: $\vec{V}=\vec{V_1}\times\vec{V_2}$ adică:

$$\vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Dreapta determinată de un punct şi un vector director.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct dat şi $\vec{V}= l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$ un vector dat. Să determinăm ecuaţiile dreptei care conţine punctul M_0 şi are pe $\vec{V}$ ca vector director (Fig. 29).

Considerăm pe (Δ) un punct oarecare M(x,y,z). Vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ şi $\vec{V}$ sunt paraleli, deci:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (\Delta) \tag{2.9}$$

(2.9) reprezintă **ecuaţiile dreptei care conţine pe M_0 şi este paralelă cu vectorul $\vec{V}$**.

Ca aplicaţie a ecuaţiilor (2.9) să găsim ecuaţiile unei drepte determinată de două puncte date $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (Fig.30).

Putem lua:

$\overrightarrow{M_1M}= (x-x_1)\,\vec{i}+(y-y_1)\,\vec{j}+(z-z_1)\,\vec{k}$

$\overrightarrow{M_1M_2}= (x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}$

Dar $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$. Atunci, înlocuind în (2.9) obţinem:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (\Delta) \tag{2.10}$$

Inlocuind în (2.10) pe x, y, z, respectiv cu x_3, y_3, z_3 obţinem **condiţiile de coliniaritate** a trei puncte M_1, M_2, M_3 :

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \tag{2.11}$$

Fie:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1} & (\Delta_1) \\ \\ \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2} & (\Delta_2) \end{cases} \tag{2.12}$$

două drepte având vectorii directori:

$$\begin{array}{ll} \vec{V_1}= l_1 \ \vec{i} \ +m_1 \ \vec{j} \ +n_1 \ \vec{k} & (\Delta_1) \\ \vec{V_2}= l_2 \ \vec{i} \ +m_2 \ \vec{j} \ +n_2 \ \vec{k} & (\Delta_2) \end{array} \tag{2.13}$$

Avem:

$$(\Delta_1) \parallel (\Delta_2) \Leftrightarrow \vec{V_1} \parallel \vec{V_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$\cos\left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{V_1}, \ \vec{V_2}}\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

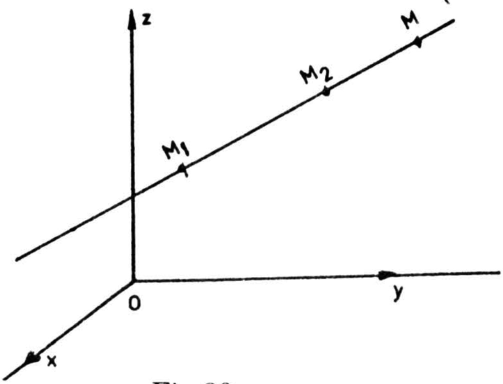


Fig.30

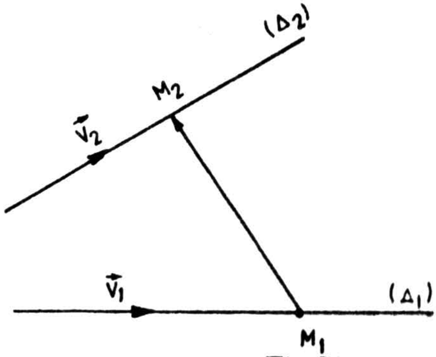


Fig.31

Condiţia de coplanaritate a două drepte

Să considerăm dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) de ecuaţii (2.12) având vectorii directori (2.13) şi punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ situate respectiv pe (Δ_1) şi (Δ_2).

Din Fig. 31 se vede că dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) sunt coplanare,dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{V_1}$,$\vec{V_2}$ sunt coplanari, adică dacă:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{V_1} \ x \ \vec{V_2}) = 0 \tag{2.14}$$

Insă: $\overrightarrow{M_1M_2}= (x_2 - x_1) \ \vec{i} \ +(y_2 - y_1) \ \vec{j} \ +(z_2 - z_1) \ \vec{k}$

Deci condiţia (2.14) se scrie:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.15)$$

Egalitatea (2.15) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) să fie coplanare. Dacă dreptele (Δ_1) şi (Δ_2) nu sunt paralele şi condiţia (2.15) este verificată, atunci (Δ_1) şi (Δ_2) sunt drepte concurente.

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Să considerăm o dreaptă (Δ) şi un plan (P) de ecuaţii:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (\Delta)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (P)$$

având vectorii directori

$$\vec{V}_{(\Delta)} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}; \quad \vec{V}_{(P)} = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$$

Numim unghi dintre o dreaptă şi un plan unghiul φ format de dreaptă cu proiecţia ei pe plan.

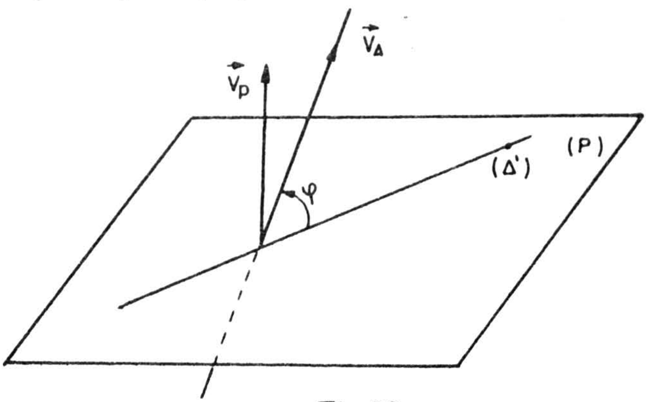


Fig.32

Alegând convenabil sensurile vectorilor directori $\vec{V_P}$, $\vec{V_\Delta}$ ca în Fig. 32, avem:

$$\sin\varphi = \cos(\pi - \varphi) = \cos\left(\vec{V_P}, \vec{V_\Delta}\right) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2.3 EXERCIŢII

1. Să se scrie ecuaţia planului determinat de punctele $A(-1,-1,2)$, $B(3,-2,1)$ şi $C(0,1,2)$.

   R : $2x - y + 9z - 17 = 0$

2. Să se arate că punctele $A(-2,0,0)$, $B(0,-4,0)$, $C(0,0,4)$, $D(-2,1,1)$ sunt coplanare.

3. Să se scrie ecuaţia unui plan care conţine punctele $A(-1,2,2)$, $B(3,1,-1)$ şi este perpendicular pe planul: $2x - y - 4z + 1 = 0$

   R:$x + 10y - 2z - 15 = 0$

4. Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul $A(1,-1,-2)$ şi este perpendicular pe planele:

   $2x - 2y - z - 1 = 0; \qquad x + 4y + z + 1 = 0$

   R: $2x - 3y + 10z + 15 = 0$

5. Să se scrie ecuaţiile dreptei:

   $\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad (\Delta)$

   sub formă canonică (adică sub forma dreptei determinate de un punct şi un vector director).

   $R:\ \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{24} = \frac{z+2}{15}$

6. Să se afle punctul de intersecţie a planelor

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ x - 7y + 3z + 4 = 0 \\ 6x + y - 25 - 2 = 0 \end{cases}$$

   R: M (1, 2, 3).

7. Fiind date planul (P) $3x+5y-2z-6=0$ şi dreapta

$$(\Delta)\quad \frac{x+3}{4}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z+2}{3}$$

să se afle coordonatele punctului de intersecţie.

R : M (1, 1, 1).

8. Fiind date planul $(P): 2x-y+3z+3=0$ şi dreapta

$$\begin{cases} 5x+7y-z-37=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \quad (\Delta)$$

să se afle coordonatele punctului de intersecţie.

R : $M(4,2,-3)$.

9. Să se determine punctele în care dreapta :

$$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x+3y+z-5=0 \end{cases} \quad (\Delta)$$

intersectează planele de coordonate.

R : $M(4,-1,0)$, $N(0,2,-1)$, $P(\frac{8}{3},0,-\frac{1}{3})$.

10. Să se afle dacă dreptele :

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{5} & (\Delta_1) \\ \frac{x-5}{4}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z-8}{3} & (\Delta_2) \end{cases}$$

sunt concurente şi în caz afirmativ, să se afle punctul de intersecţie.

R : Dreptele sunt concurente în $M(1,2,3)$.

11. Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreptele :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} & (\Delta_1) \\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4} & (\Delta_2) \end{cases}$$

R : $x+2y-2z-1=0$.

12. Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreptele

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} & (\Delta_1) \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{5} & (\Delta_2) \end{cases}$$

R : $13x - 7y - 5z - 23 = 0.$

13. Să se determine numerele a şi b astfel ca dreapta de ecuaţii :

$$\frac{x-a}{2} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-2a}{3} \quad (\Delta)$$

să fie situată în planul $x - 2y - 3z - 2 = 0$

R : $a = 0;\ b = -3.5$

14. Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul $A(-1, 1, 2)$ şi dreapta de ecuaţii:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

R : $x - y + z = 0.$

15. Să se determine λ astfel încât dreptele :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1} & (\Delta_1) \\ \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{\lambda} & (\Delta_2) \end{cases}$$

să se formeze un plan şi să se determine ecuaţia acestui plan.

R: $\lambda = 2;\quad 5x + 2y - 11z - 1 = 0$

16. Să se scrie ecuaţia planului care conţine punctul A(2,3,-1) şi este paralel cu dreptele :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{5} & (\Delta_1) \\ \frac{x-4}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2} & (\Delta_2) \end{cases}$$

R : $x + y - z - 6 = 0.$

17. Să se afle proiecţia punctului A (-1,3,3) pe planul $x+y+z+1=0$.

R: $A'(-3,1,1)$.

18. Să se afle ecuaţiile proiecţiei dreptei (Δ): $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{5}$

pe planul $(P):\ 3x-2y+z-4=0$.

R: $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 3x-2y+z-4=0 \end{cases}$

19. Să se determine proiecţia punctului $A(1,1,1)$ pe dreapta de ecuaţii

$x=2z-1; y=z+2$.

R :$A'(\frac{1}{3};\frac{8}{3};\frac{2}{3})$.

20. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(1,2,3)$ faţă

de planul de ecuaţie: $2x+y+z-1=0$

R : $A'(3,0,1)$.

21. Să se scrie ecuaţiile dreptei conţinute în planul:

$x+3y-2z-2=0$, care se sprijină pe dreapta: $x=y=z$

şi este paralelă cu planul: $4x-y-z-3=0$.

$R:\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{8}$

22. Să se scrie ecuaţiile dreptei care conţine simetricul punctului

$A(-1,0,1)$ faţă de dreapta : $x=y=\frac{z-1}{2}$ şi este perpendiculară

pe planul $2x-y-z-1=0$.

R :$\frac{5x-4}{-2}=\frac{5y+1}{1}=\frac{5z-1}{1}$

23. Să se determine α şi β astfel ca dreapta de ecuaţii:

$\frac{x-\alpha}{2}=\frac{y+1}{\beta}=\frac{z-2\alpha}{3}$să fie situată în planul de ecuaţie:

$x-2y-3z-2=0$.

R: $\alpha=0;\ \beta=-\frac{7}{2}$

24. Să se scrie ecuaţiile dreptei care conţine punctul $A(2,1,1)$ şi este paralelă cu planele:

$$\begin{cases} (P_1): x - y + z + 2 = 0 \\ (P_2): x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

R :Dreapta este paralelă cu dreapta de intersecţie a celor două plane:

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$. Se obţine: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

25. Considerăm planul $(P): 3x + 5y - 2z - 6$ şi dreapta (D) dată prin ecuaţiile: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z+2}{3}$Să se arate că ele se intersectează şi să se afle punctul de intersecţie.

R: $M(1,1,1)$.

26. Se consideră punctul $M(1,2,3)$, dreapta $(D): x - 2 = y = 2z + 1$ şi

planul $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Să se afle unghiul dintre dreapta (D) şi planul (P).

R: Unghiul este: $\cos(90^0 - \theta) = \frac{\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{V}}{\left|\overrightarrow{N}\right|\left|\overrightarrow{V}\right|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

27. Să se determine ecuaţia planului ce conţine dreapta (D): $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{2}$şi care determină pe axa Ox segmentul $OM = 2$.

R: Punctul conţinut de dreaptă este $A(2,-1,3)$ iar $\overrightarrow{V}(3,5,2)$.

Planul (P) este determinat de punctele: $A(2,-1,3)$, $B(2,0,0)$ şi vectorul director al dreptei $\overrightarrow{V}(3,5,2)$. Fie $M(x,y,z)$ punct curent pe plan, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{V}$ sunt coplanari adică produsul mixt este: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{V}) = 0$ sau:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(P) având ecuaţia: $17x - 9y - 3z - 34 = 0$.

Capitolul 3

CUADRICE

O figură formată dintr-o mulţime de puncte M, ale căror coordonate (x, y, z) verifică o ecuaţie dată de ordinul al doilea în x, y, z:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1xy + 2b_2xz + 2b_3yz + 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z + d_1 = 0$$

se numeşte suprafaţă de ordinul al doilea sau **cuadrică**.

3.1 SFERA

Definiţie: *Sfera este figura formată de mulţimea punctelor M, care sunt situate la o distanţă constantă R de un punct fix Q numit centru.*

Pentru orice punct M al sferei are loc relaţia:

$$QM^2 = R^2 \tag{3.1}$$

Într-un reper cartezian ortogonal centrul Q are coordonatele (a,b,c) şi punctul pe cerc M(x,y,z) atunci ecuaţia (3.1) devine:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0 \tag{3.2}$$

Pentru $a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d$ se obţine:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \tag{3.3}$$

Ecuaţia sferei este de gradul al doilea în x, y, z şi deci este o cuadrică.

Pentru ca ecuaţia (3.3) să reprezinte o sferă reală trebuie ca $a^2+b^2+c^2-d>0$. În cazul în care $a^2+b^2+c^2-d=0$,sfera se reduce la punctul Q(a,b,c) centrul său. Dacă $a^2+b^2+c^2-d<0$ atunci ecuaţia(3.3) nu are corespondent în spaţiu, se spune că este ecuaţia unei sfere imaginare.

Observaţie: Ecuaţia (3.3) a unei sfere nu conţine termenii în xy, xz, yz, din ecuaţia generală a cuadricelor şi în plus coeficienţii pătratelor variabilelor sunt egali cu unu.

O ecuaţie de gradul al doilea de forma;

$$q(x^2+y^2+z^2)+mx+ny+pz+d=0$$

reprezintă o sferă. Pentru $a=b=c=0$ în (3.3) adică centrul sferei coincide cu originea $O(0,0,0)$, atunci ecuaţia sferei este:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

3.2 ELIPSOIDUL

Definiţie: *Numim elipsoid figura geometrică din spaţiu care este definită de o ecuaţie de forma:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{3.4}$$

unde a, b, c, fiinnd trei numere pozitive date.

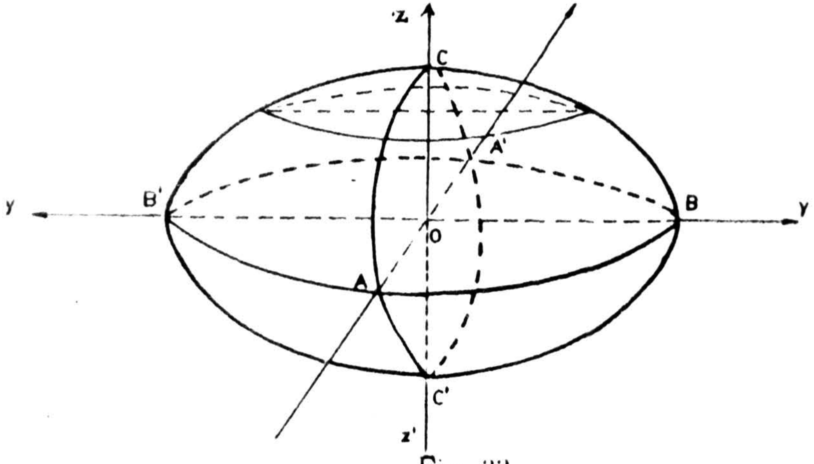


Fig. 33

Originea reperului este centru de simetrie al suprafeţei, axele şi planele de coordonate fiind axe şi plane de simetrie. Punctele comune axelor de simetrie şi suprafeţei sunt punctele corespunzătoare vârfurilor elipsoidului: $A(a,0,0)$, $B(o,b,0)$, $C(0,0,c)$, $A'(-a,0,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C'(0,0,-c)$.

Un plan paralel cu planul xoy de ecuaţie $z = h$ intersectează suprafaţa după curba:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

care se proiectează pe planul xoy după elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

elipsă care există numai pentru valorile lui h, care verifică inegalităţile următoare:

$$-c \leq h \leq c$$

Rezultate asemănătoare se obţin studiind secţiunile suprafeţei prin plane paralele cu planele yOz şi zOx.

Se constată că elipsoidul este situat în interiorul paralelipipedului dreptunghic format de planele :

$$x = a;\ x = -a;\ y = b;\ y = -b;\ z = c;\ z = -c$$

şi care se numeşte **paralelipipedul axelor.**

In cazul $a = b$ ecuaţia (3.4) devine:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{3.5}$$

şi reprezintă un elipsoid de rotaţie, generat prin rotirea elipsei

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;\ x = 0$$

în jurul axei $z'z$.

In cazul $a = b = c$ ecuaţia (3.4) devine:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

care este o sferă cu centrul în origine şi de rază a.

Concluzie: *Sfera este un elipsoid particular.*

3.3 HIPERBOLOIZII

HIPERBOLOIDUL CU O PÂNZĂ

Definiţie: *Hiperboloidul cu o pânză este figura geometrică din spaţiu definită de ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{3.6}$$

a, b, c fiind trei numere pozitive date.

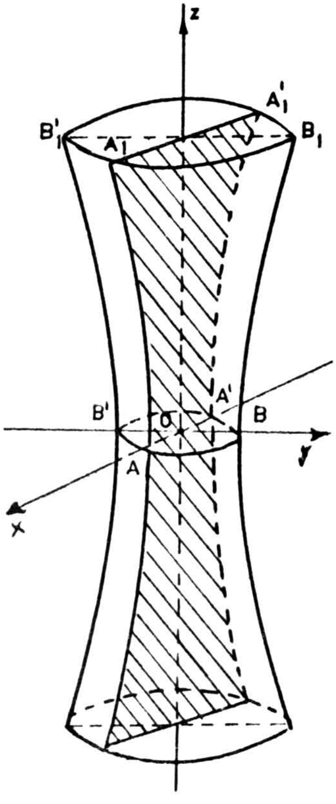


Fig. 34

Axele şi planele reperului sunt axe şi plane de simetrie iar originea lui este centru de simetrie.

O secţiune printr-un plan paralel cu planul xoy este reprezentată de relaţiile:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1; \; z = h \tag{3.7}$$

Aceasta este o elipsă având axele paralele respectiv cu $x'x$ şi $y'y$, dreptunghiul axelor având dimensiunile :

$$2a' = 2a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1};\ 2b' = 2b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$$

Elipsa de secţiune există pentru orice valoare a cotei h şi dimensiunile axelor ei cresc cu valorile lui h. Pentru $h = 0$ se obţine elipsa de secţiune prin planul xOy.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ z=0$$

al cărei dreptunghi al axel‹ ›, are dimensiunile cele mai mici: $2a$ şi $2b$.

Din cele trei axe de simetrie ale cuadricei numai două intersectează suprafaţa, anume axele $x'x$ şi $y'y$, care au punctele comune cu suprafaţa $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $A'(-a,0,0)$; $B'(0,-b,0)$. Secţiunile hiperboloidului cu o pânză prin planul yoz este hiperbola:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\ x=0 \tag{3.8}$$

Vârfurile B_1 şi B_1',ale elipsei de secţiune (3.7) sunt situate pe această hiperbolă .

Concluzie :Suprafaţa (3.6) se consideră ca figura generată de elipsa variabilă (3.7) care se deplasează paralel cu planul xOy sprijinindu-se pe hiperbola (3.8).

Dacă $a = b$, ecuaţia (3.6) devine:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

şi reprezintă un suprafaţa de rotaţie, generată prin rotirea hiperbolei

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0;\ x=0$$

în jurul axei $z'z$.

HIPERBOLOIDUL CU DOUĂ PÂNZE

Definiţie: *Hiperboloidul cu două pânze este figura geometrică din spaţiu definită de ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{3.9}$$

Planele paralele cu planele de simetrie xoy, xoz intersectează suprafaţa(3.9) respectiv după hiperbolele:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} - 1 = 0;\ z = h \tag{3.10}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{m^2}{c^2} - 1 = 0;\ y = m \tag{3.11}$$

iar secţiunile prin plane paralele cu yoz sunt reprezentate de ecuaţiile:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right) = 0;\ x = h \tag{3.12}$$

care sunt elipse pentru care dreptunghiul axelor are dimensiunile:

$$2b' = 2b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1};\ 2c' = 2c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$$

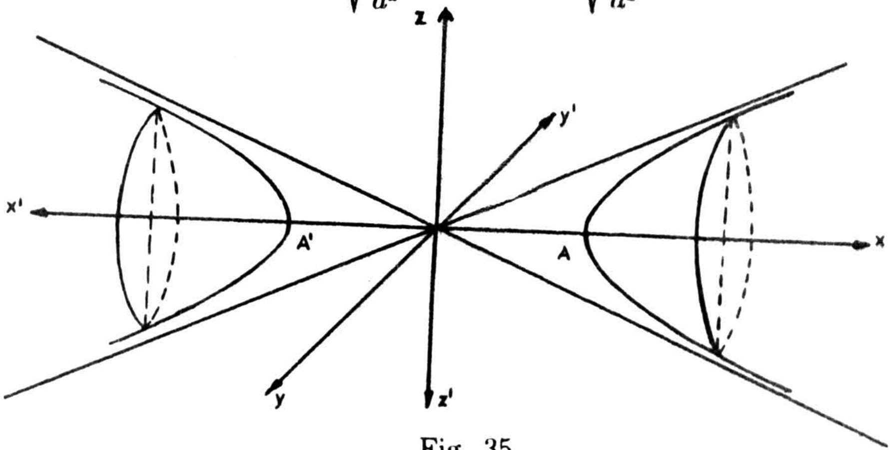


Fig. 35

Aceste elipse există numai pentru valorile lui h care verifică inegalităţile: $h < -a$ şi $h > a$.

Axa de simetrie $x'x$ intersectează cuadrica în punctele $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$ care sunt vârfuri ale hiperboloidului cu două pânze. Hiperboloidului cu două pânze poate fi considerat ca generat de elipsa variabilă (3.12) care se deplasează astfel încât planul ei să fie paralel cu yoz şi să se sprijine pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;\ y = 0$$

care este secţiunea cuadricei (3.9) prin planul xoz .Suprafaţa este formată din două pânze.

3.4 PARABOLOIZII

PARABOLOIDUL ELIPTIC

Definiţie: *Paraboloidul eliptic este figura geometrică din spaţiu definită de ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0; \text{ unde } (p > 0, \ q > 0) \tag{3.13}$$

şi admite axa $z'z$ ca axă de simetrie. Secţiunile prin plane paralele cu xOy sunt elipsele:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2h = 0; \ z = h \tag{3.14}$$

care există numai dacă $h > 0$ (în ipoteza $p > 0, q > 0$), dreptunghiul axelor având dimensiunile :

$$2a' = 2\sqrt{2hp} \ ; \qquad 2b' = 2\sqrt{2hq}$$

care cresc în acelaşi timp cu h.

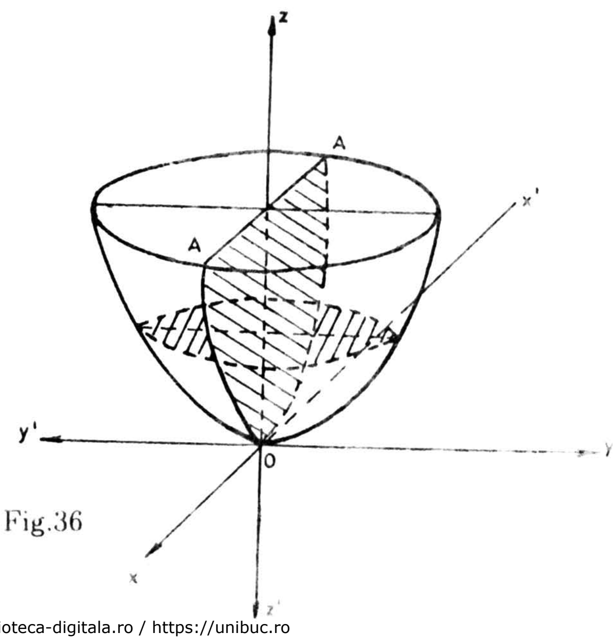


Fig.36

In ipoteza făcută ($p > 0, q > 0$) suprafaţa are toate punctele ei în regiunea cotelor pozitive. Pentru $z = 0$, secţiunea se reduce la punctul O.

Secţiunile prin plane paralele cu cele două plane de simetrie xOz, yOz sunt parabolele:

$$x^2 - 2pz + \frac{ph^2}{q} = 0; \; y = h$$

$$y^2 - 2qz + \frac{qh^2}{p} = 0; \; x = h$$

Paraboloidul eliptic poate fi considerat ca generat de elipsa variabilă (3.14) care se deplasează paralel cu planul xoy sprijinindu-se pe parabola :

$$y^2 - 2qz = 0; \; x = 0$$

secţiunea paraboloidului prin planul yoz.

Dacă $p = q$, elipsele (3.14) sunt cercuri, ecuaţia (3.13) devine:

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0 \tag{3.15}$$

şi reprezintă un paraboloid de rotaţie generat de parabola (3.15) printr-o mişcare de rotaţie în jurul axei $z'z$.

PARABOLOIDUL HIPERBOLIC

Definiţie: *Paraboloidul hiperbolic este figura geometrică din spaţiu definită de ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0; \; unde \; (p, q > 0) \tag{3.16}$$

şi admite axa $z'z$ ca axă de simetrie.

Planele xOy, yOz sunt plane de simetrie. Originea O fiind vârf al cuadricei. Presupunem $p > 0$, $q > 0$. Secţiunea suprafeţei prin plane paralele cu xOy sunt hiperbolele:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2h = 0; \; z = h \tag{3.17}$$

care există pentru orice valoare a parametrului h.

Planele paralele cu cele două plane de simetrie intersectează cuadrica respectiv după parabolele:

$$x^2 - 2pz - \frac{ph^2}{q} = 0; \; y = h$$

$$y^2 + 2qz - \frac{qh^2}{p} = 0; \; x = h$$

Hiperbolele (3.17), care corespund valorilor pozitive ale lui h, au vârfurile pe parabola :

$$x^2 - 2pz = 0; \; y = 0$$

care este secţiunea cuadricei prin planul xOz, iar cele care corespund valorilor negative ale lui h, au vârfurile pe parabola:

$$y^2 + 2qz = 0, \; x = 0,$$

care este secţiunea suprafeţei prin planul yOz.

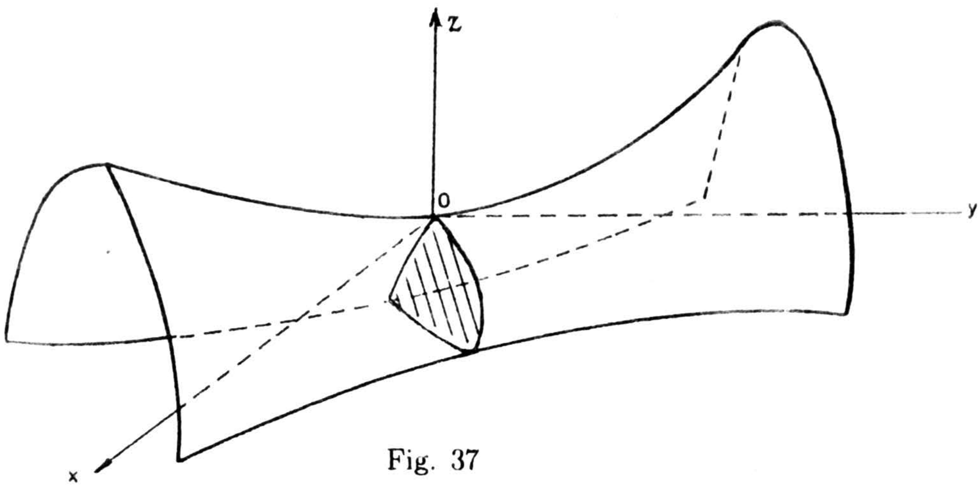


Fig. 37

Planul xOy intersectează cuadrica după dreptele:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \; z = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \; z = 0$$

3.5 CONUL

Definiţie: *Conul este figura geometrică din spaţiu definită de ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{3.18}$$

Intersecţiile suprafeţei cu planele paralele cu xOy sunt elipsele:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0;\ z=h \tag{3.19}$$

Semiaxele elipselor (3.19) cresc odată cu creşterea în valoare absolută a lui h.

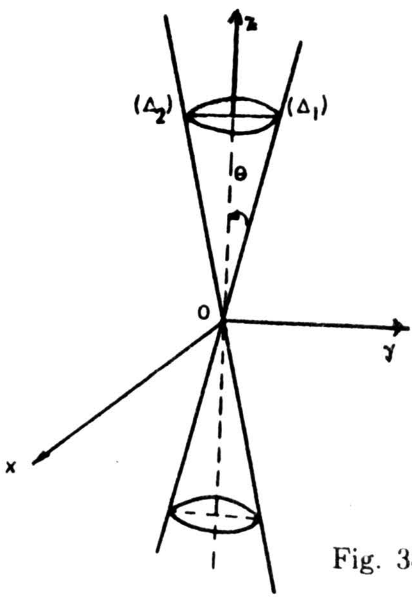


Fig. 38

Dacă $h=0$, atunci elipsa (3.19) se reduce la:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

care reprezintă punctul O.

Concluzie : Intersecţia conului (3.19) cu planul xOy este un punct care se numeşte **vârful conului**.

Secţiunea suprafeţei prin planul yoz este curba:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \ x = 0$$

care se descompune în dreptele:

$$(\Delta_1)\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$
$$(\Delta_2)\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

Dreptele $(\Delta_1), (\Delta_2)$ conţin originea şi sunt simetrice faţă de axe.

Dacă $a = b$, ecuaţia (3.18) devine:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 z^2$$

şi reprezintă un con de rotaţie obţinut prin rotirea dreptei:

$$y = \frac{a}{c}z; \ z = 0 \tag{3.20}$$

în jurul axei $z'z$. Dreapta (3.20) se numeşte generatoarea conului. Dacă notăm cu θ unghiul format de generatoare cu axa de simetrie $z'z$, atunci:

$$tg\theta = \frac{a}{c}$$

iar ecuaţia conului de rotaţie se scrie:

$$x^2 + y^2 = (tg\theta)^2 z^2$$

3.6 SUPRAFEŢE CILINDRICE.

Definiţie: *Se numeşte suprafaţă cilindrică suprafaţa generată de o dreaptă (Δ) de direcţie fixă care se sprijină pe o curbă dată* (Γ).

Să considerăm în particular dreapta (Δ) paralelă cu axa $z'z$, iar curba (Γ) situată în planul xOy având ecuaţiile:

$$(\Gamma) \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fie $M(x,y,z)$ un punct situat pe suprafaţa cilindrică D. Prin M trece o generatoare care intersectează planul xOy în $M_1(x,y,0)$. Cum x,y verifică ecuaţiile curba (Γ) rezultă că ecuaţia suprafeţei cilindrice este $f(x,y)=0$.

Prin urmare o ecuaţie în două variabile, interpretată în spaţiu, reprezintă ecuaţia unei suprafeţe cilindrice având generatoarele paralele cu axa a cărei variabilă lipseşte.

Exemple

1. $x^2+y^2=R^2$, reprezintă ecuaţia unui cilindru cu generatoarele paralele cu

   axa $z'z$ şi care intersectează planul xOy după cercul de ecuaţii:

$$(C)\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ reprezintă ecuaţia unui cilindru eliptic cu generatoarele paralele cu axa $z'z$.

3. $z^2=2py$,reprezintă ecuaţia unui cilindru parabolic cu generatoarele paralele cu axa $x'x$.

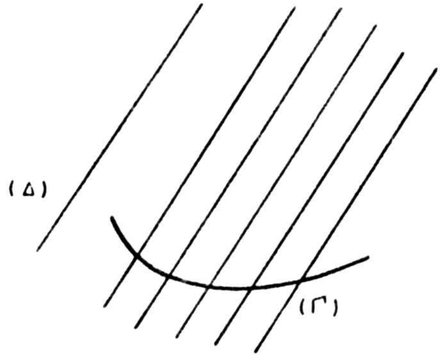


Fig. 39

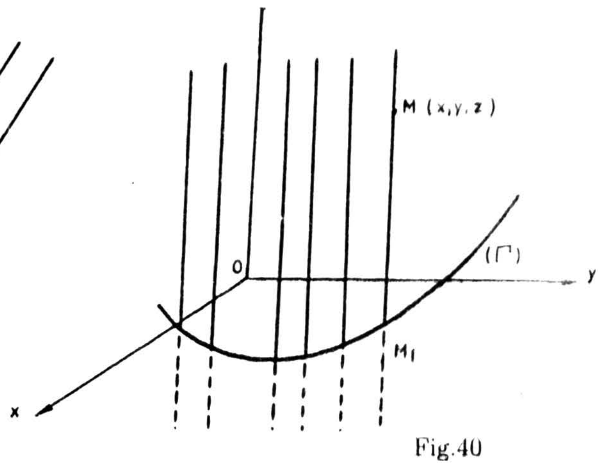


Fig.40

3.7 EXERCIŢII

Să se identifice următoarele suprafeţe:

1. $2x^2 - 3y^2 + z^2 + 1 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 - 3z = 0$
3. $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 1 = 0$
4. $x + 2y^2 - 3z^2 = 0$
5. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 1 = 0$
6. $x^2 + 3y + z^2 = 0$
7. $4x^2 + 16z^2 - 1 = 0$
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$
9. $3x^2 - y^2 - z^2 = 0$
10. $x^2 + y^2 - x = 0$
11. $3x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
12. $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$
13. Se dau sfera :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$$

şi dreptele:

$$(\Delta_1): \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{-5}$$

$$(\Delta_2): \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-5}{2}$$

Să se găsească punctele de intersecţie ale dreptelor cu sfera.

14. Se dă sfera :

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y - 12z + 13 = 0$$

a) Să se afle coordonatele centrului şi raza sferei.

b) Să se găsească punctele de intersecţie cu un diametru paralel cu dreapta de parametri directori $3, 4, 12$.

15. Să se scrie ecuaţiile sferelor cu centrul în $C(-2; 1; -3)$ tangente respectiv la planele:

$$(P_1) : \quad x - 2y + 2z - 3 = 0$$

$$(P_2) : \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

16. Sunt date punctele:

$$A(-1; 1; 2); \ B(1; 3; 3); C(0; 2; 5)$$

Să se scrie:

a) ecuaţiile sferelor cu centrul în A, care trec respectiv prin B, C;

b) ecuaţiile sferelor cu centrul în B, care trec respectiv prin A, C;

c) ecuaţiile sferelor cu centrul în C, tangente respectiv la planele xOz, xOy.

17. Să se arate că sferele:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z + 33 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 20z + 134 = 0$$

sunt egale şi au centrele coliniare.

Capitolul 4

Elemente de teoria câmpurilor

Generalităţi.
Câmpuri scalare şi vectoriale .
Asupra integralei de suprafaţă .
Operatori diferenţiali scalari şi vectoriali.
Calcul integral în teoria câmpurilor.
Clasificarea câmpurilor. Determinări de câmpuri.

4.1 Generalităţi

În studiul dinamic al fenomenelor naturii intervine noţiunea de câmp. Dacă o mărime fizică are o valoare determinată în fiecare punct din spaţiu, spunem că mulţimea acestor valori defineşte **câmpul** mărimii respective.
Exemplu: curgerea unui lichid defineşte un câmp al vitezelor.

□

Noţiunea de câmp se bazează pe două elemente de natură diferită, independente între ele:
elementul analitic: funcţia f a câmpului, reprezentant al acţiunii

materiale şi
elementul geometric: regiunea $\Re$ a spaţiului în care acţionează funcţia f, reprezentant al bazei materiale.

Definiţia 4.1.1 Câmpul *este mulţimea valorilor lui f asociate punctelor M din regiunea $\Re$.*

Natura funcţiei f determină natura câmpului, dacă f este scalar, câmpul este scalar, dacă f este vector $\vec{v}$, câmpul este vectorial, dacă f este tensor T atunci câmpul este tensorial.
Câmpurile nestaţionare sunt câmpurile care variază în timp: $f(x,y,z,t)$ şi câmpurile staţionare sunt cele care nu variază în timp adică: $f(x,y,z)$.

4.2 Câmp scalar

Definiţia 4.2.1 *Dacă $\Re$ este o regiune marginită sau nu a spaţiului cu una, doua sau trei dimensiuni şi*

$$u = u(M) \tag{4.1}$$

o funcţie scalară ce depinde de puncte M din $\Re$ numim **câmp scalar** *mulţimea valorilor lui u corespunzătoare tuturor punctelor $M \in \Re$.*

Definiţia 4.2.2 *Regiunea $\Re$ constituie domeniul de definiţie al câmpului scalar, funcţia $u(M)$ este funcţia câmpului scalar şi se numeşte* **câmp scalar**.

Exemple:
În fizică: u este funcţia potenţială, u este funcţia de forţă.
În geofizică: u este masa specifică a unui mediu neomogen.
În termodinamică: u reprezintă câmpul temperaturilor, presiunea într-un gaz: $p = p(v,t)$.
În analiza reală se face studiul continuităţii şi derivabilităţii funcţiei u.

Suprafaţă de nivel sau suprafaţă echipotenţială în spaţiul cu trei dimensiuni

Definiţia 4.2.3 Suprafaţă de nivel *este mulţimea punctelor M din domeniul $D \subset \Re$ pentru care funcţia u rămîne constantă*

$$\begin{aligned} du &= 0 \\ u(M) &= const. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observaţie: În cazul când domeniul este bidimensional se poate vorbi despre o **curbă de nivel** sau **curbă echipotenţială**.

Propoziţia 4.2.1 *Suprafeţele de nivel stratifică valorile câmpului scalar.*

Propoziţia 4.2.2 *Suprafeţele de nivel formează o familie de suprafeţe cu un parametru, de ecuaţie:*

$$u(M) = k.$$

Propoziţia 4.2.3 *Printr-un punct dat M_0 din regiunea $\Re$ trece o singură suprafaţă de nivel care are ecuaţia:*

$$u(M) = u_0.$$

Demonstraţie

Punem condiţia ca punctul M_o să fie pe suprafaţa de nivel : $u(M_o) = u_o$ şi $M_o \in R$, $u(M_o) = k$ deci $k = u_o$ şi prin urmare: $u(M) = u_o$ reprezintă o singură suprafaţă de nivel.

□

Propoziţia 4.2.4 *Două suprafeţe de nivel distincte $u_1(x, y, z)$ şi $u_2(x, y, z)$ nu pot avea nici un punct comun.*

Demonstraţie

Fie : $u(M) = u_1$ şi $u(M) = u_2$ unde $u_1 \neq u_2$. Presupunem că suprafeţele ar avea puncte comune. Punctele comune le putem determina rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} u(M) = u_1 \\ u(M) = u_2 \end{cases}$$

din care deducem: $u_1 - u_2 = 0$ dar $u_1 \neq u_2$ din ipoteză deci presupunerea este falsă.

□

Variaţia câmpului scalar. Derivata după o direcţie a câmpului scalar.

Fie u_o suprafaţa de nivel având ecuaţia $u(M) = u_o$ şi un punct care se poate deplasa sau pe suprafaţa dată u_o sau în afara suprafeţei de nivel u_o .

Cazul I

Deplasarea punctului are loc pe suprafaţa de nivel(Fig.41).

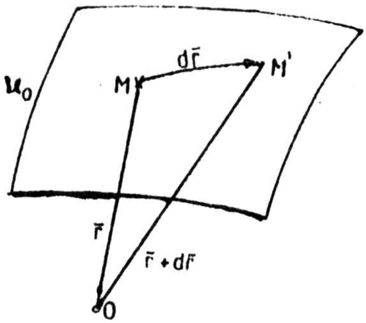


Fig.41

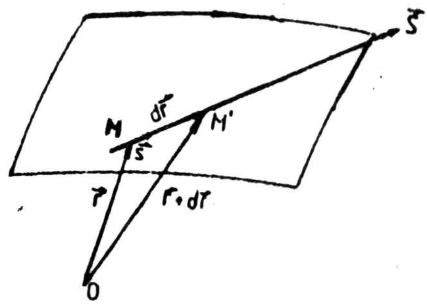


Fig.42

La o deplasare infinitezimală a punctului corespunde variaţia funcţiei care îndeplineşte condiţia :
$du = 0$
dar:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

şi membrul drept al ecuaţiei de mai sus reprezintă produsul scalar a doi vectori :

$$\vec{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \tag{4.3}$$

şi

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

adică

$$\overrightarrow{G} \cdot d\vec{r} = 0$$

dar $d\vec{r}$ se află în planul tangent în punctul M la u_o pentru că deplasarea se face în planul tangent deci $\vec{G}$ este vector normal în M la suprafaţa de nivel u_o . $\vec{G}$ se numeşte **gradientul funcţiei** u. Gradientul poate fi scris sub forma simbolică:

$$\vec{G} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})u$$

sau $\vec{G} = grad\ u$ sau $\vec{G} = \nabla\ u$. Operatorul ∇ sau nabla este numit operatorul lui Hamilton.

Cazul II

Deplasarea are loc în afara suprafeţei de nivel (Fig.42).

Fie M' un punct din domeniul de definiţie al câmpului scalar u. Ne propunem să calculăm variaţia câmpului în vecinătatea punctului M. $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al lui M, $\vec{r} + d\vec{r}$ este vectorul de poziţie al lui M'. $\vec{s}$ este versorul direcţiei $\overrightarrow{OM}$: $\vec{s} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}\overrightarrow{OM}$

Elementul liniar pe direcţia $\vec{S}$ este : $\delta s = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ adică $\delta s = |d\vec{r}|$.

Variaţia câmpului scalar u la trecerea din M în M' este:

$$\delta\ u = u(\vec{r} + d\vec{r}) - u(\vec{r}) = u(M') - u(M) \tag{4.4}$$

şi depinde atât de distanţa $\left|\overrightarrow{M'M}\right|$ cât şi de direcţia de deplasare $\vec{s}$.

Pentru a evalua variaţia câmpului u în punctul M în direcţia de versor $\vec{s}$ se determină : $\lim\limits_{\delta s \to 0} \frac{\delta u}{\delta s}$

Definiţia 4.2.4 *Se numeşte derivata funcţiei u după direcţia de versor $\vec{s}$ în punctul M sau derivata câmpului scalar u după direcţia de versor $\vec{s}$ limita raportului :*

$$\frac{\delta\ u}{\delta\ s}$$

pentru $\delta s \to 0$, atunci când limita există.

Derivata câmpului scalar u după direcţia de versor $\vec{s}$ se notează :

$$\frac{du}{ds} = \lim_{|\overrightarrow{OM}| \to 0} \frac{u(M') - u(M)}{|\overrightarrow{OM}|}$$

sau

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta u}{\delta s} = \frac{du}{ds}$$

Se ştie că : $d\vec{r} = \vec{s}|d\vec{r}|$ sau $d\vec{r} = \vec{s}\,\delta s$ şi

$$\vec{s} = \cos(\widehat{\vec{s}, Ox})\,\vec{i} + \cos(\widehat{\vec{s}, Oy})\,\vec{j} + \cos(\widehat{\vec{s}, Oz})\,\vec{k}$$

cu $\alpha = (\widehat{\vec{s}, Ox})$; $\beta = (\widehat{\vec{s}, Oy})$; $\gamma = (\widehat{\vec{s}, Oz})$

$dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \cos\alpha\;\delta s\;\vec{i} + \cos\beta\;\delta s\;\vec{j} + \cos\gamma\;\delta s\;\vec{k}$.

Urmează că:

$$dx = \cos\alpha\;\delta s;\quad dy = \cos\beta\;\delta s;\quad dz = \cos\gamma\;\delta s$$

Dar cu (4.4):

$$\delta u = u(x + \cos\alpha\;\delta s, y + \cos\beta\;\delta s, z + \cos\gamma\;\delta s) - u(x, y, z)$$

Cum funcţia este diferenţiabilă avem:

$$\delta u = u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + R - u(x, y, z)$$

unde:

$$\lim_{\delta s \to 0}\frac{R}{\delta s} = 0$$

Altfel scris:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha\;\delta s + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\;\delta s + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\quad\delta s + R$$

$$\lim_{\delta s \to 0}\frac{\delta u}{\delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \lim_{\delta s \to 0}\frac{R}{\delta s}$$

Prin urmare :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\frac{du}{ds} = \vec{G}\cdot\vec{s}$$

sau

$$\frac{du}{ds} = grad\;u\cdot\vec{s} \tag{4.5}$$

unde:

$$\vec{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

şi

$$\vec{s} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$$

Mărimea :

$$\frac{du}{ds} = \vec{G}\cdot\vec{s}$$

se numeşte **derivata funcţiei scalare** u după direcţia de versor $\vec{s}$.

Propoziţia 4.2.5 *Derivata după o direcţie $\vec{S}$ de versor $\vec{s}$ a câmpului scalar u este proiecţia gradientului $\vec{G}$ după direcţia $\vec{S}$.*

Într-adevăr, exprimând produsul scalar din definiţia derivatei funcţiei scalare u după direcţia de versor $\vec{s}$ avem:

$$\frac{du}{ds} = \left|\vec{G}\right| |\vec{s}| \cos(\widehat{\vec{s}, grad}\ u)$$

adică :

$$\frac{du}{ds} = \left|\vec{G}\right| \cos(\widehat{\vec{s}, grad}\ u)$$

care reprezintă proiecţia gradientului $\vec{G}$ pe direcţia $\vec{S}$ de versor $\vec{s}$. Se vede că derivata depinde de punctul M şi de direcţia de versor $\vec{s}$.

Propoziţia 4.2.6 *Mărimea gradientului $\vec{G}$ este derivata câmpului scalar u după direcţia normalei în punctul respectiv la suprafaţă.*

Într-adevăr, dacă direcţia $\vec{S}$ este normala $\vec{N}$ în punctul M la u, versorul $\overrightarrow{s}$ este $\vec{s} = \vec{n}$ şi atunci :

$$\frac{du}{dn} = |\vec{G}||\vec{n}|\cos(\widehat{\vec{G}, \vec{n}}) \quad ;$$

$$\frac{du}{dn} = |\vec{G}||\vec{n}|\cos 0^0 \ ; \qquad \frac{du}{dn} = |\vec{G}||\vec{n}| \ ; \qquad \frac{du}{dn} = |\vec{G}|$$

Atunci:

$$\vec{G} = \frac{du}{dn}\ \vec{n} \tag{4.6}$$

şi mărimea sa este:

$$\left|\vec{G}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{4.7}$$

Propoziţia 4.2.7 *Mărimea gradientului $\vec{G}$ este valoarea maximă între derivatele după o direcţie oarecare.*

Într-adevăr :

$$\frac{du}{ds} = |\vec{G}||\vec{s}| \cos(\widehat{\vec{s}, grad\ u})$$

Fie $\Theta = (\widehat{\vec{s}, grad\ u})$ deci: $\dfrac{du}{ds} = |\vec{G}| \cos\Theta$.

Cum $-1 \leq \cos\Theta \leq 1$ atunci : $max\dfrac{du}{ds} = |\vec{G}|$.

Observaţie: Cum

$$\left|\vec{G}\right| = \frac{du}{dn}$$

rezultă că :

$$\max\frac{du}{ds} = \frac{du}{dn}$$

Vectorul $\vec{G}$ indică direcţia după care funcţia u are valoarea cea mai mare.

Propoziţia 4.2.8 *Derivatele după direcţiile pozitive ale axelor de coordonate coincid cu derivatele parţiale în raport cu variabila respectivă.*

Într-adevăr, pentru: $\vec{s} = \vec{i}$

$$\frac{du}{ds} = \vec{i} \cdot (\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}) \ ; \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Analog pentru $\vec{s} = \vec{j}$ şi $\vec{s} = \vec{k}$:

$$\frac{du}{ds} = \vec{j} \cdot \ grad\ u; \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{du}{ds} = \vec{k} \ \cdot \ grad\ u; \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

adică derivatele după direcţiile pozitive ale celor două axe de coordonate coincid cu derivatele parţiale în raport cu variabila respectivă.

Dacă $\vec{s}$ este $-\vec{i}, -\vec{j}$ sau $-\vec{k}$ atunci $\dfrac{du}{ds}$ este respectiv :

$$-\frac{\partial u}{\partial x}; \quad -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad -\frac{\partial u}{\partial z}$$

Concluzia : Derivata după o direcţie $\vec{S}$ de versor $\vec{s}$ depinde nu numai de direcţia respectivă ci şi de sensul ales pe această direcţie.

Proprietăţile gradientului

Pentru funcţiile :
$\varphi : D_1 \subset \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ şi $\psi : D_2 \subset \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ unde φ şi ψ sunt de clasă $\mathbf{C^1}$ reprezentând câmpuri scalare , au loc propoziţiile următoare :

Propoziţia 4.2.9 *Pentru câmpurile sclare φ şi ψ*

$$grad(\varphi + \psi) = grad\varphi + grad\psi \tag{4.8}$$

Demonstraţie

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi + \psi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi + \psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + \psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi)\vec{k} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{k} \\
&= \nabla\varphi + \nabla\psi
\end{aligned}$$

□

Analog se demonstrează:

Propoziţia 4.2.10

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\ \nabla\psi + \psi\ \nabla\varphi \tag{4.9}$$

Propoziţia 4.2.11

$$\nabla(F(\varphi(x, y, z)) = F'(\varphi)\ grad\varphi \tag{4.10}$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned}
\nabla(F(\varphi)) &= \frac{\partial}{\partial x}F(\varphi(x, y, z))\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}F(\varphi(x, y, z))\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}F(\varphi(x, y, z))\vec{k} \\
&= \frac{dF}{d\varphi}[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}] \\
&= F'(\varphi)\ \nabla\varphi
\end{aligned}$$

□

Exemplu:
grad $f(r) = f\,'(r)$ *grad* $r = f\,'(r)$ *grad* $(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ deci:

$$\begin{aligned} grad\ f(r) &= f'(r)[\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}] \\ grad\ f(r) &= f'(r)[\frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}] \\ grad\ f(r) &= \frac{f'(r)}{r}\vec{r} \end{aligned}$$

Cu (4.5) se deduc cu uşurinţă proprietăţile următoare:

Propoziţia 4.2.12

$$\frac{d}{ds}(f+g) = \frac{df}{ds} + \frac{dg}{ds} \tag{4.11}$$

Propoziţia 4.2.13

$$\frac{d}{ds}(f\ g) = g\ \frac{df}{ds} + f\ \frac{dg}{ds} \tag{4.12}$$

Propoziţia 4.2.14

$$\frac{d}{ds}(F(\varphi)) = F'(\varphi)\frac{d\varphi}{ds} \tag{4.13}$$

4.3 Câmpul vectorial

Definiţia 4.3.1 *Dacă $\Re$ este o regiune mărginită sau nu a spaţiului cu una, două sau trei dimensiuni şi $\vec{V} = \vec{V}(M)$ este funcţie vectorială ce depinde de puncte M din $\Re$, numim* **câmp vectorial** *mulţimea vectorilor $\vec{V}$ ataşaţi tuturor punctelor M din $\Re$.*

Definiţia 4.3.2 *Regiunea $\Re$ se numeşte domeniul de definiţie al câmpului vectorial, funcţia $\vec{V}(M)$ este a câmpului vectorial.*

Exemple:
În mecanică, geofizică : câmpul vitezelor, câmpul momentelor, câmpul gravitațional. În teoria câmpului elecromagnetic: câmpul magnetic $\vec{H}$.
□

Linii de câmp. Proprietăți.

Definiția 4.3.3 *Se numește linie de câmp (linie de forță, linie de curent) o curbă din domeniul $\Re$ de definiție al câmpului $\vec{V}(M)$, care este tangentă în fiecare punct M al său la vectorul câmp $\vec{V}(M)$.*

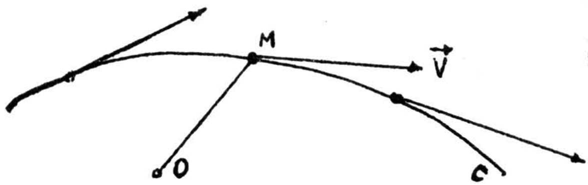


Fig.43
deci $\vec{V} \parallel d\vec{r}$ adică:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \tag{4.14}$$

este ecuația diferențială a liniilor de câmp sub formă vectorială.

Liniile de câmp (Fig.43) sunt date de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{4.15}$$

unde $\vec{V}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ și
$d\vec{r} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k}$.
Soluția sistemului de ecuații sub formă simetrică (4.15) este dată de două integrale prime:

$$(\Gamma)\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) &= C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) &= C_2 \end{cases} \tag{4.16}$$

Proprietăți ale liniilor de câmp

Propoziţia 4.3.1 *Printr-un punct dat M_0 al domeniului trece o singură linie de câmp Γ_0 de ecuaţii:*

$$(\Gamma_0)\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) &= C_{10} \\ \varphi_2(x,y,z) &= C_{20} \end{cases}$$

Propoziţia 4.3.2 *Două linii de câmp Γ_1 şi Γ_2 nu au în general nici un punct comun.*

Propoziţia 4.3.3 *Liniile de câmp formează o mulţime de curbe cu doi parametrii care au ca ecuaţii sistemul (4.16) .*

Suprafaţă de câmp

O suprafaţă de câmp Σ este generată de liniile de câmp cărora li se impune condiţia să treacă printr-o curbă (C) care nu este linie de câmp.

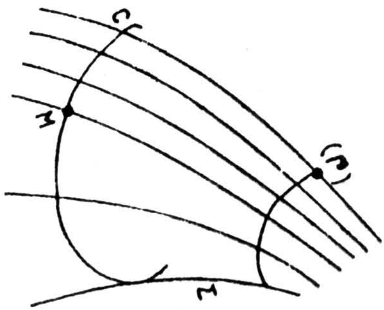


Fig.44

Fie curba (C) (Fig.44) de ecuaţii:

$$(C)\begin{cases} f_1(x,y,z) &= 0 \\ f_2(x,y,z) &= 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

$C \subset \Sigma$ se realizează scriind că punctul $M(x,y,z)$ trebuie să fie în acelaşi timp şi pe (C) şi pe una din liniile de câmp (Γ), adică:

$$\begin{cases} M &\in (\Gamma) \\ M &\in (C) \end{cases}$$

Se elimină x, y, z din relaţiile:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) & = & C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) & = & C_2 \\ f_1(x,y,z) & = & 0 \\ f_2(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$$

obţinându-se astfel o relaţie între C_1 şi C_2:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \tag{4.18}$$

numită **relaţie de compatibilitate** a sistemului.
În relaţia (4.18) se înlocuiesc C_1 şi C_2 din integralele prime:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) & = & C_1 \\ \varphi_2(x,y,z) & = & C_2 \end{cases}$$

şi se obţine relaţia:

$$\Phi(\varphi_1(x,y,z), \varphi_2(x,y,z)) = 0 \tag{4.19}$$

care reprezintă ecuaţia suprafeţei de câmp Σ.
Proprietăţi:

1. Dacă (C) ar fi chiar o linie de câmp atunci prin această curbă *ar trece o infinitate* de suprafeţe de câmp (problemă nedeterminată).

2. Când (C) este o curbă închisă, suprafaţa (Σ) (Fig.45) formează un **tub** de vectori (tub de forţe).

3. Vectorul $\vec{V}$ este tangent la suprafaţa de câmp Σ

Intr-adevăr prin fiecare punct M al suprafeţei Σ trece o linie de câmp (Γ) la care vectorul $\vec{V}$ este tangent.

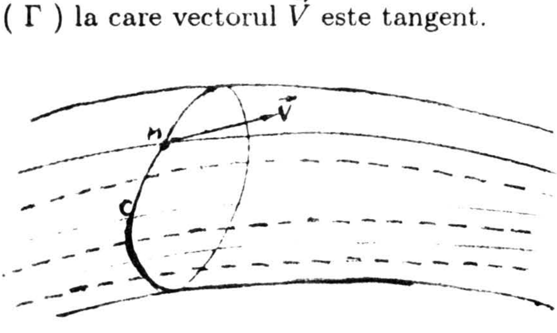


Fig.45

Exerciţiu:

Fie câmpul $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ *şi curba* :

$$(C)\begin{cases} x^2+y^2 &= R^2 \\ z &= h \end{cases}$$

Să se determine suprafaţa de câmp ce conţine curba (C).

Rezolvare: Se determină liniile de câmp:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

cu integralele prime date de : $\ln x = \ln y + \ln C_1$; $\ln y = \ln z + \ln C_2$.
Liniile de câmp sunt :

$$\begin{cases} x &= yC_1 \\ y &= zC_2 \end{cases}$$

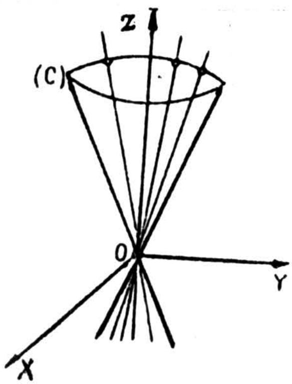


Fig.46

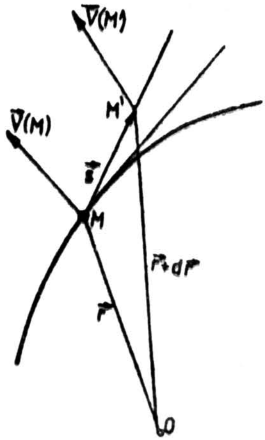


Fig.47

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} x &= y\,C_1 \\ y &= z\,C_2 \\ z &= h \\ x^2+y^2 &= R^2 \end{cases}$$

Se exprimă x, y, z din trei relaţii în funcţie de C_1 şi C_2:

$$z = h; \quad y = h\,C_2; \quad x = h\,C_1C_2$$

care apoi se introduc în ultima relaţie rămasă din sistemul de mai sus, obţinându-se relaţia de compatibilitate:

$$\Phi(C_1, C_2) = (hC_1C_2)^2 + (hC_2)^2 - R^2 = 0$$

adică:

$$h^2\ \frac{x^2}{z^2} + h^2\ \frac{y^2}{z^2} = R^2$$

Suprafaţa conică (Fig.46)cu centrul O şi cerc generator (C):

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$$

Variaţia câmpului vectorial
Derivata după o direcţie a unui câmp vectorial

Pentru a calcula variaţia unui câmp vectorial în vecinătatea unui punct M, cum câmpul variază diferit pe diferite direcţii ale spaţiului, vom proceda astfel:
Ducem prin M o dreaptă având direcţia dată de versorul $\vec{s}$, sau o curbă a cărui tangentă în punctul M are direcţia de versor $\vec{s}$. Pe această dreaptă sau curbă luăm un punct M' vecin cu M . Punctul $M(x, y, z)$ are vectorul de poziţie $\vec{r}$ (Fig.47). Punctul $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ are vectorul de poziţie $\vec{r} + d\vec{r}$

Mărimea vectorului $\overrightarrow{OM}$ este:

$$|\overrightarrow{OM}| = |\ d\vec{r}\ | = \delta s\ ;\ \ d\vec{r} = \vec{s}\ \delta s$$

Pentru variaţia $\delta\vec{V}$ a funcţiei vectoriale $\vec{V}$ la trecerea din punctul M în punctul M' se obţine:

$$\delta\vec{V} = \vec{V}(M') - \vec{V}(M)$$
$$\delta\vec{V} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dr) - \vec{V}(x, y, z)$$
$$\delta\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}dz + \vec{R} - \vec{V}(x, y, z)$$

Definiţia 4.3.4 *Se numeşte derivata funcţiei $\vec{V}(M)$ după direcţia de versor $\vec{s}$ sau derivata câmpului vectorial $\vec{V}(M)$ după direcţia de versor $\vec{s}$, limita raportului $\dfrac{\delta\vec{V}}{\delta s}$ cînd $\delta s \to 0$ atunci când această limită există.*

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta \vec{V}}{\delta s} = \frac{d\vec{V}}{ds}$$

pentru că : $d\vec{s} = \vec{s}\ \delta s$; sau: $dx = \delta s\ \cos\alpha$; $dy = \delta s\ \cos\beta$; $dz = \delta s\ \cos\gamma$

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta \vec{V}}{\delta s} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\cos\gamma + \lim_{\delta s \to 0} \frac{\vec{R}}{\delta s}$$

cum:

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\vec{R}}{\delta s} = 0$$

rezultă :

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = (\vec{s}\cdot\nabla)\vec{V}$$

Se pot demonstra ca şi la câmpurile scalare, următoarele proprietăţi :

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{ds} = \frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d(\varphi\vec{A})}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\vec{A} + \varphi\frac{d\vec{A}}{ds}$$

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{ds} = \frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{ds} = \frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{ds} = \frac{d\vec{A}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds}$$

Definiţia 4.3.5 *Se numeşte derivata vectorului $\vec{V}$ în raport cu vectorul $\vec{A}$ expresia:*

$$\frac{d\vec{V}}{d\vec{A}} = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{V}$$

Fie $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ atunci:

$$\frac{d\vec{V}}{d\vec{A}} = (A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z})(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}) = A_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + A_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + A_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

□

4.4 Integrale de suprafaţă .

Fie S o submulţime din $\mathbf{R}^3$ ($S \subset U$ unde $U \subset \mathbf{R}^3$) şi $D_2 \subset \mathbf{R}^2$. Această suprafaţă S se poate prezenta sub trei forme:

- **Forma implicită**: $S = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$; $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
- **Forma explicită**: $S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D_2\}$
- **Forma parametrică**:

$$S = \{(x,y,z) \mid x = \varphi_1(u,v), y = \varphi_2(u,v), z = \varphi_3(u,v)\ ,\ (u,v) \in D_2\}$$

Se poate trece de la forma explicită la forma parametrică astfel: $x = u; y = v; z = f(u,v)$ unde $(u,v) \in D_2$.

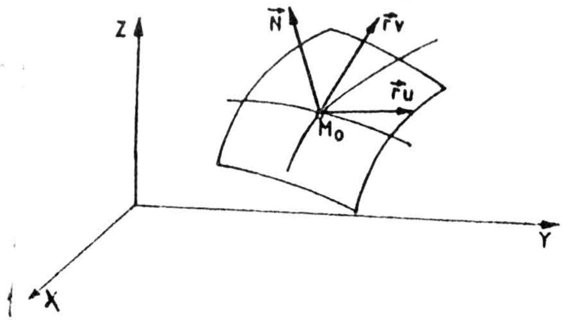


Fig.48

Dacă S este sub formă parametrică şi $v = v_o$ fixat, atunci se obţine o curbă situată pe suprafaţa S:

$$(\Gamma_u) : \{\ (x,y,z)\ /\ x = \varphi_1(u,v_o), y = \varphi_2(u,v_o), z = \varphi_3(u,v_o), (u,v_o) \in D_2\}$$

Dacă S este sub formă parametrică şi $u = u_0$ fixat, atunci se obţine o curbă situată pe suprafaţa S:

$$(\Gamma_v) : \{ (x, y, z) \,/\, x = \varphi_1(u_o, v), y = \varphi_2(u_o, v), z = \varphi_3(u_o, v), (u_o, v) \in D_2\}$$

Γ_u şi Γ_v se numesc **curbe de coordonate.**

Din $\vec{N} \perp \vec{r_u}$ şi $\vec{N} \perp \vec{r_v} \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{r_u} \times \vec{r_v}$. Pentru $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de clasă C^1 (adică S este netedă), vectorii tangenţi în M_o (punctul de intersecţie) (Fig.48) la curbele Γ_u şi Γ_v sunt :

$$\vec{r_u} = \frac{\partial\varphi_1(u_o, v_o)}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2(u_o, v_o)}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_3(u_o, v_o)}{\partial u}\vec{k}$$

$$\vec{r_v} = \frac{\partial\varphi_1(u_o, v_o)}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2(u_o, v_o)}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_3(u_o, v_o)}{\partial v}\vec{k}$$

$\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$ sunt vectori necolineari în D_2, atunci în fiecare punct (u_o, v_o) al suprafeţei există un plan tangent unic determinat şi deci există o normală unică. Vectorii $\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$ fiind necolineari rezultă că:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq 0 \iff \vec{N} \parallel \vec{r_u} \times \vec{r_v}$$

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

unde:

$$A = \frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v)}, \; B = \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(u, v)}, \; C = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}$$

Condiţia ca vectorii să fie necolineari este:

$$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

Notând:

$$E = <\vec{r_u}, \vec{r_u}> = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u})^2 + (\frac{\partial\varphi_2}{\partial u})^2 + (\frac{\partial\varphi_3}{\partial u})^2;$$

$$F = <\vec{r_u}, \vec{r_v}> = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u})(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}) + (\frac{\partial\varphi_2}{\partial u})(\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}) + (\frac{\partial\varphi_3}{\partial u})(\frac{\partial\varphi_3}{\partial v})$$

$$G = <\vec{r_v}, \vec{r_v}> = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial v})^2 + (\frac{\partial\varphi_2}{\partial v})^2 + (\frac{\partial\varphi_3}{\partial v})^2$$

$\Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$ numită **identitatea lui Euler**.

Definiţia 4.4.1 *Fie S o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni având forma parametrică:*

$$x = \varphi_1(u,v); \; y = \varphi_2(u,v); \; z = \varphi_3(u,v) \quad (u,v) \in D_2$$

Dacă:

$$\int\int_{D_2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du\, dv = \int\int_{D_2} \sqrt{EG - F^2} du\, dv$$

există şi este finită atunci suprafaţa S are arie şi:

$$\mathcal{A}(S) = \int\int_{D_2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du\, dv =$$

$$\int\int_{S} \sqrt{EG - F^2} du\, dv = \int\int_{S} d\sigma$$

iar:

$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du\, dv = \sqrt{EG - F^2} du\, dv$$

se numeşte **element diferenţial de suprafaţă**.

Propoziţia 4.4.1 *Fie $S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D_2\}$, S netedă.*
Dacă S are arie, atunci:

$$\mathcal{A}(S) = \int\int_{D_2} \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2} dx\, dy = \int\int_{D_2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx\, dy$$

unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ *şi* $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt numite* **notaţiile lui Monge**

Demonstraţie:

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= f(x,y) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} E &= 1+0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \\ G &= 0+1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\ F &= 1\cdot 0+0\cdot 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$EG-F^2=\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=$$

$$=1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

sau:

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow A=-\frac{\partial f}{\partial x};\quad B=\frac{\partial f}{\partial y};\quad C=1;$$

$$\mid\vec{r}_u\times\vec{r}_v\mid=A^2+B^2+C^2$$

$$\mid\vec{r}_u\times\vec{r}_v\mid=1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Integrala de suprafaţă de speţa întâi

Definiţia 4.4.2 *Fie S suprafaţa netedă(sau netedă pe porţiuni)*

$$S\begin{cases} x &= \varphi_1(u,v) \\ y &= \varphi_2(u,v) \quad u,v\in D_2 \\ z &= \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

şi $f:U\longrightarrow\mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $U\subset\mathbf{R}^3$.
Se numeşte **intergrală de suprafaţă de speţa întâi** *a funcţiei f pe suprafaţa S, integrala dată de:*

$$\int\int_{D_2} f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv=\int\int_S f(x,y,z)$$

Definiţia 4.4.3 *Se numeşte* **intergrală de suprafaţă de speţa a doua** *a funcţiei f pe suprafaţa S, integrala dată de:*

$$\int\int_{D_2}(P(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))A+Q(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)B+R(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)C)\,dudv=$$

$$=\int\int_{(S,\vec{n}_+)}P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dzdx+R(x,y,z)\,dxdy=$$

$$=\int\int_{(S,\vec{n}_+)}(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\,d\sigma$$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\vec{n}_+;\quad \vec{n}_+=-\vec{n}_-$$

$$\int\int_{(S,\vec{n}_+)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=$$

$$=-\int\int_{(S,\vec{n}_-)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma$$

4.5 Fluxul unui câmp vectorial

Fie o suprafaţă S situată în domeniul R în care este definit câmpul vectorial $\vec{V}$ şi $\vec{n}$ versorul normalei în punctul M la S.

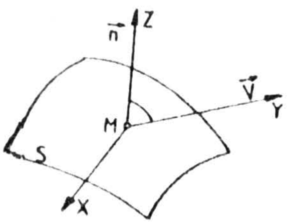


Fig.49

Definiţia 4.5.1 *Se numeşte* **fluxul** *câmpului vectorial* $\vec{V}$ *prin suprafaţa* S, *valoarea integralei:*

$$\Phi=\int\int_S\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma$$

unde $d\sigma$ *este elementul diferenţial al suprafaţei* S *ce conţine punctul* M

Câmpul:

$$\vec{V} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

şi versorul normalei:

$$\vec{n} = \cos(\widehat{\vec{n},Ox})\vec{i} + \cos(\widehat{\vec{n},Oy})\vec{j} + \cos(\widehat{\vec{n},Oz})\vec{k}$$

exprimă:

$$\vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = P\cos\alpha d\sigma + Q\cos\beta d\sigma + R\cos\gamma d\sigma$$

dar:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{n},Ox})d\sigma &= dy\,dz \\ \cos(\widehat{\vec{n},Oy})d\sigma &= dz\,dx \\ \cos(\widehat{\vec{n},Oz})d\sigma &= dx\,dy \end{aligned}$$

Astfel se poate exprima fluxul câmpului vectorial:

$$\Phi = \iint_S P(x,y,z)dy\,dz + Q(x,y,z)dz\,dx + R(x,y,z)dx\,dy$$

O interpretare fizică a noţiunii de flux pornind de la un câmp particular

Fie câmpul vectorial $\vec{V}(M)$, care reprezintă câmpul de viteze al curgerii unui fluid şi S o suprafaţă oarecare situată în domeniul D ocupat de fluid (Fig.50).

Definiţia 4.5.2 *Se numeşte* **flux** *al fluidului prin suprafaţa S cantitatea de fluid care străbate suprafaţa S în unitatea de timp.*

Pentru a calcula **fluxul**, vom împărţi suprafaţa S într-un număr de suprafeţe elementare de arie $d\sigma$.

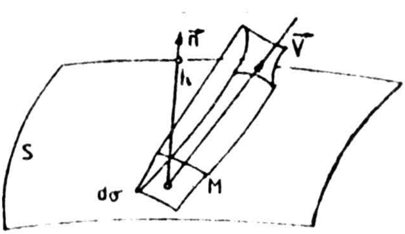


Fig.50

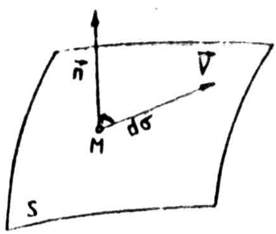


Fig.51

Versorul normal la suprafaţă se notează cu $\vec{n}$. Cantitatea de fluid care străbate elementul $d\sigma$ în unitatea de timp o numim **flux elementar** al fluidului. În unitatea de timp fluidul umple un paralelipiped de bază $d\sigma$ şi de muchie $\left|\vec{V}(M)\right|$. Înălţimea h a paralelipipedului va fi proiecţia vectorului $\vec{V}(M)$ pe versorul $\vec{n}$, al normalei în M, deci va fi dată de $h = \mid \vec{n} \mid \left|\vec{V}(M)\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{V}}\right)$, adică: $h = \vec{V} \cdot \vec{n}$. Fluxul elementar este dat de $h\ d\sigma$, adică: $d\Phi = \vec{V} \cdot \vec{n}\ d\sigma$. Fluxul total prin suprafaţa S va fi limita sumei: $\Sigma\ \vec{V} \cdot \vec{n}\ \ d\sigma$ suma fiind extinsă la toate elementele suprafeţei S, când aria tuturor elementelor $d\sigma \to 0$, dacă această limită există. Limita obţinută este o integrală de suprafaţă:

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\ d\sigma$$

- Dacă într-un punct M aparţinând suprafeţei S, $\vec{V}$ şi $\vec{n}$ sunt de aceeaşi parte a suprafeţei (Fig.51), unghiul dintre $\vec{V}$ şi $\vec{n}$ este ascuţit şi produsul scalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ este pozitiv.

- Dacă $\vec{V}$ şi $\vec{n}$ sunt de părţi opuse, atunci unghiul dintre $\vec{V}$ şi $\vec{n}$ este obtuz şi produsul scalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ este negativ.

- Dacă $\vec{V}$ este perpendicular pe $\vec{n}$, deci tangent la suprafaţă, produsul scalar $\vec{V} \cdot \vec{n}$ este nul.

Semnul expresiei $\vec{V} \cdot \vec{n}$ precizează sensul în care fluidul străbate suprafaţa în punctul M.

- Dacă $\vec{V} \cdot \vec{n} > 0$, fluidul iese din suprafaţă prin punctul M ;

- Dacă $\vec{V} \cdot \vec{n} < 0$, fluidul intră în suprafaţă în punctul M ;

- Dacă $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, în punctul M fluidul nu străbate suprafaţa.

Tinând seamă de expresia fluxului printr-o suprafaţa S, rezultă :

- Dacă $\Phi > 0$, mai mult fluid a ieşit din domeniu decât a intrat ;

- Dacă $\Phi < 0$, mai mult fluid a intrat în domeniu decât a ieşit ;

- Dacă $\Phi = 0$, cât fluid intră în domeniu tot atâta şi iese.

Exemplu:

Pentru $\vec{V} = \vec{r}$ să se calculeze fluxul prin porţiunea de suprafaţă: $z = x^2 + y^2$ cuprinsă între planul xOy şi planul $z = 4$, având normala dirijată astfel ca să formeze un unghi obtuz cu axa Oz.

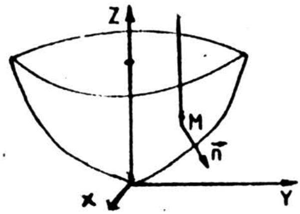


Fig.52

Versorul:

$$\vec{n} = \frac{p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + (-1)\,\vec{k}}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

iar elementul de suprafaţă :

$$d\sigma = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\ dx\ dy;\ unde\ p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x;\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$\cos\gamma < 0$ face ca versorul normalei să fie:

$$\vec{n} = \frac{2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

şi $d\sigma = \sqrt{4^2 + 4^2 + 1}\ dx\ dy$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{2x^2 + 2y^2 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \Longrightarrow$$

$$\phi = \iint_S (2x^2 + 2y^2 - z)\ dx\ dy \Longrightarrow$$

$$\phi = \iint_D (2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2)\ dx\ dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi$$

unde D: $x^2 + y^2 = 4$ şi :

$$x = \rho\ \cos\theta, y = \rho\ \sin\theta\ y = \rho\ \sin\theta$$

şi $dx\ dy = \rho\ d\rho\ d\theta$

□

4.6 Divergenţa unui câmp vectorial

În cazul când suprafaţa S este o suprafaţa închisă, aplicând formula lui Gauss- Ostrogradski, obţinem:

$$\Phi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dx\ dy\ dz$$

unde S este o suprafaţă închisă care limitează domeniul simplu conex Ω şi $\vec{V}(M)$ o funcţie vectorială de componente funcţii cu derivate parţiale de primul ordin continue pe $\Omega \cup S$.

Definiţia 4.6.1 *Funcţia scalară* $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ *se numeşte* **divergenţă** *a funcţiei vectoriale* $\vec{V}(M)$ *de componente* $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ *şi se notează div* $\vec{V}(M)$, *adică:*

$$div\ \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad sau \quad div\ \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$$

Fluxul unui vector printr-o suprafaţă închisă S este egal cu intergrala de volum din divergenţa vectorului extinsă la domeniul închis de suprafaţă S. Formula Gauss- Ostrogradski se numeşte şi formula **flux - divergenţă** . Vectorial, se scrie:

$$\iint\limits_{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\ d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\ \vec{V} d\omega \tag{4.20}$$

unde $d\omega$ este elementul de volum.

□

Exprimarea divergenţei independentă de sistemul de referinţă , valabilă în orice punct M din Ω

Din

$$\iint\limits_S \vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma = \iiint\limits_\Omega div\ \vec{V}d\omega$$

aplicând formula mediei pentru integrala triplă avem:

$$\iint\limits_S \vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma = \left(div\ \vec{V}\right)\Big|_M \iiint\limits_\Omega d\omega = \left(div\ \vec{V}\right)\Big|_M \cdot \mathcal{V}$$

punctul M fiind interior domeniului Ω, $\mathcal{V}$ fiind volumul domeniului Ω. Făcând suprafaţa S să se strângă continuu în vecinătatea lui M, astfel încât $\mathcal{V}\to 0$ avem:

$$\left(div\ \vec{V}\right)\Big|_M = \lim_{\mathcal{V}\to 0}\frac{\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma}{\mathcal{V}}$$

Această limită analoagă cu limita care duce în cazul unei dimensiuni la noţiunea de derivată se numeşte **derivată spaţială**.

Definiţia 4.6.2 *Se numeşte* **divergenţă** *a câmpului vectorial $\vec{V}(M)$ în punctul M limita raportului dintre fluxul lui $\vec{V}(M)$ prin suprafaţa S care mărgineşte domeniul Ω şi volumul $\mathcal{V}$ al acestui domeniu, când $\mathcal{V}\to 0$ (punctul M aparţine lui Ω), dacă această limită există.*

Semnificaţia fizică a $div\ \vec{V}$

Să presupunem că avem o curgere a unui fluid, $\vec{V}(M)$ fiind câmpul de viteze al curgerii.

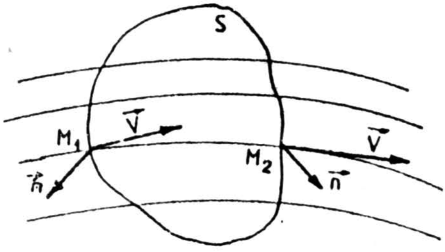


Fig.53

Să considerăm o suprafaţă S din domeniul D de definiţie al câmpului $\vec{V}(M)$.
In unitatea de timp prin această suprafaţă intră o anumită cantitate de fluid şi iese o anumiă cantitate de fluid.
In M_1 fluxul este **negativ**, deoarece normala la suprafaţă şi vectorul câmp sunt de o parte şi de alta a suprafaţei, pe când în M_2 fluxul este **pozitiv** deoarece normala la suprafaţă şi vectorul câmp sunt de aceeaşi parte a suprafaţei .
Dacă considerăm fluxul total prin suprafaţa S şi fluxul este pozitiv atunci iese mai mult fluid decât intră; dacă fluxul este negativ, atunci intră mai mult fluid decât iese; dacă fluxul este nul, cât fluid intră prin suprafaţa S tot atâta şi iese.
Avem următoarele cazuri:

1. Fluxul prin orice suprafaţă $S \subset D$ este pozitiv şi din formula (4.20) rezultă că $div\, \vec{V} > 0$. În acest caz iese mai mult fluid decât intră şi rezultă că în interiorul lui S se creează lichid. Spunem în acest caz că avem în interiorul lui S, **izvoare** sau surse pozitive.

2. Fluxul prin orice suprafaţă $S \subset D$ este negativ deci $div \vec{V} < 0$ în D. In acest caz intră prin suprafaţa S mai mult fluid decât iese şi în interiorul lui S fluidul este absorbit. Spunem că avem **puţuri** sau surse

3. Fluxul prin orice suprafaţă $S \subset D$ este nul deci $div \vec{V} = 0$ în D. In acest caz cât fluid intră prin suprafaţa S tot atâta şi iese, fluidul este **incompresibil**.

Să considerăm un câmp vectorial $\vec{V}(M)$ şi o suprafaţă S închisă S prin care fluxul total al câmpului este diferit de zero, deci $div \vec{V} \neq 0$. Dacă fluxul total este **pozitiv** oricare ar fi suprafaţa închisă S cuprinzând punctul M, atunci **izvorul este în** M, iar dacă fluxul total este **negativ** oricare ar fi suprafaţa închisă S cuprinzând punctul M, atunci **puţul** este în M.

Definiţia 4.6.3 *Se numeşte sursă punctuală un punct M din D , care are o vecinătate $\mathcal{C}$ astfel încât $div \vec{V}(M) \neq 0$ şi $div \vec{V}(M') = 0$ pentru orice $M' \neq M$ şi $M' \in \mathcal{V}$.*

Definiţia 4.6.4 *Se numeşte* **productivitatea** *sau* **intensitatea** *unei surse punctuale M integrala:*

$$e = \int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

adică valoarea **fluxului vectorului printr-o suprafaţă** *S care conţine sursa dată în interior, fără să mai conţină alte surse.*

Teorema 4.6.1 *Fluxul prin orice suprafaţă închisă care*

- *conţine o sursă M şi*
- *nu mai conţine în interior alte surse*

este acelaşi.

Demonstraţie:
Fie S_1 şi S_2 două suprafaţe închise ce conţin sursa punctuală M.

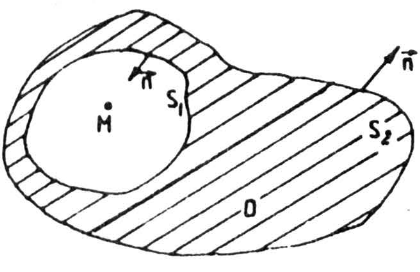


Fig.54

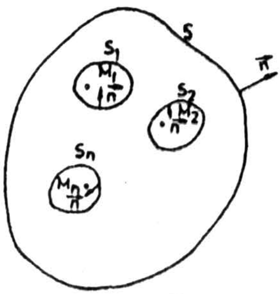


Fig.55

In domeniul D limitat de $S = S_1 + S_2$ avem $div\vec{V} = 0$ pentru că nu avem surse

$$\iint\limits_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = \iint\limits_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint\limits_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma; \quad \iint\limits_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = 0$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = - \iint\limits_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = \iint\limits_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, ds = e$$

unde e este productivitatea sursei din M.

□

Fie câmpul vectorial $\vec{V}(M)$ definit într-un domeniu D, admiţând în acest domeniu un număr n de surse, pozitive sau negative, având productivităţile $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Să considerăm suprafaţa închisă S care limitează domeniul D.

Teorema 4.6.2 *Fluxul vectorului $\vec{V}$ prin suprafaţa S este egal cu suma productivităţilor surselor situate în interiorul lui S*

$$\int\int_S \vec{V}\vec{n}d\sigma = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

Demonstraţie:

Fie M_i , $i = 1, \ldots, n$ surse situate în interiorul lui S. Inconjurăm fiecare sursă M_i cu o suprafaţă închisă S_i ce nu mai cuprinde alte surse (Fig.55). Domeniului Ω mărginit de S şi de S_i , $i = 1, \ldots, n$ îi aplicăm formula (4.20). Notăm $\sum = S \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_n$. In interiorul domeniului Ω nu sunt surse deci : $div\ \vec{V} = 0$ şi de aceea fluxul total prin Σ este nul :

$$\iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \ldots + \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

$$\iint_{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma - \ldots - \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

schimbând sensurile de parcurgere pe suprafeţele(S_i , $i = 1, \ldots, n$) şi deci ale normalelor avem:

$$\iint_{S} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \ldots + \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma =$$

$$= e_1 + e_2 + \ldots + e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

□

Proprietăţi ale divergenţei

1. $div\ (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = div\ \vec{V_1} + div\ \vec{V_2}$

- Într-adevăr, după definiţie avem :

$$div(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \frac{\partial}{\partial x}(P_1 + P_2) + \frac{\partial}{\partial y}(Q_1 + Q_2) + \frac{\partial}{\partial z}(R_1 + R_2) =$$

$$= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} =$$

$$= div\ \vec{V_1} + div\ \vec{V_2}$$

□

2. $div\ (\varphi\vec{A}) = grad\varphi \cdot \vec{A} + \varphi div\ \vec{A}$

- Într-adevăr,

$$\varphi\vec{A} = \varphi A_1\vec{i} + \varphi A_2\vec{j} + \varphi A_3\vec{k}$$

$$div\ (\varphi\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_3) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi)A_1 + \varphi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi)A_2 + \varphi\frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi)A_3 + \varphi\frac{\partial A_3}{\partial z} =$$

$$= \varphi(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}) + grad\ \varphi \cdot \vec{A} =$$

$$= grad\varphi \cdot \vec{A} + \varphi div\ \vec{A}$$

Cu operatorul lui Hamilton:

$$div\ \vec{V} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P\ \vec{i} + Q\ \vec{j} + R\ \vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

□

4.7 Circulaţia unui câmp vectorial

Dacă $\vec{V}(M)$ este un câmp vectorial dat, al cărui punct de aplicaţie M se deplasează de-a-lungul unei curbe C din domeniul său de definiţie atunci **circulaţia** câmpului vectorial $\vec{V}$ de-a-lungul curbei (C) este:

$$C = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

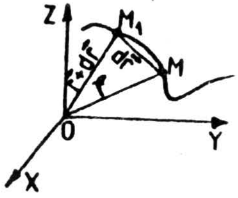


Fig.56

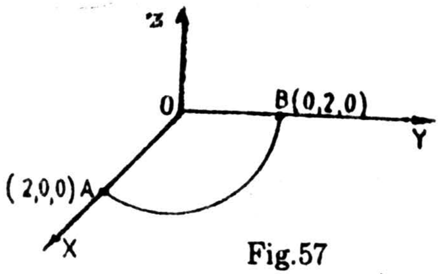


Fig.57

Dacă considerăm drept câmp de vectori câmpul forţelor $\vec{F}$ care acţionează asupra unui punct material M, iar drept curbă (C) traiectoria punctului, atunci circulaţia câmpului vectorial $\vec{F}$ de-a-lungul curbei (C) este:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = L$$

reprezintă lucrul mecanic al forţelor $\vec{F}$ pentru deplasarea punctului M de-a-lungul curbei (C) .

Dacă :

$\vec{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\ \vec{i} + Q(x,y,z)\ \vec{j} + R(x,y,z)\ \vec{k}$ cum

$$d\ \vec{r} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j} + dz\ \vec{k}$$

$$C = \int_C P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz$$

Exemplu:

Să se calculeze circulaţia vectorului: $\vec{V} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ *de-a-lungul conturului* OAB *:*

OA *segment de dreaptă, iar* $\overset{\frown}{AB}$ *un sfert de cerc situat în primul cadran din planul* xOy.

Rezolvare:

$$OA: \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = dx \\ dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$\widehat{AB}$: $x^2 + y^2 = 4$ cu ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = & -2\sin\theta d\theta \\ dy = & 2\cos\theta\, d\theta \\ dz = & 0 \end{cases} \quad \text{cu } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{C} = \int_{OAB} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{OA} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

unde
$\vec{V} \cdot d\vec{r} = (y - z)dx + (z - x)dy + x - y)dz$
Pe segmentul OA:
$\mathcal{C}_1 = \int_0^2 (y - z)dx = 0$
Pe arcul de cerc $\widehat{AB}$:
$\mathcal{C}_2 = \int_{AB} (y - z)dx + (z - x)dy$

$$\mathcal{C}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2\sin\theta)(-2\sin\theta) + (-2\cos\theta)(2\cos\theta)]d\theta = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = -2\pi$$

deci :$\mathcal{C} = -2\pi$

4.8 Rotorul unui câmp vectorial

Dacă curba C este o curbă închisă (Fig.58), aplicând formula lui **Stokes** avem:

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \iint_S [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \cos(\vec{n}, \overrightarrow{i}) + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \cos(\vec{n}, \overrightarrow{j}) + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cos(\vec{n}, \overrightarrow{k})] d\sigma$$

unde S este o suprafaţă ce se sprijină pe (C) iar $S \cup C$ sunt conţinute în domeniul D, unde $\vec{V}$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue. Expresia de sub semnul integralei de suprafaţă din membrul al doilea este produsul scalar dintre vectorul de componente:

$$(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z});\ (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x});\ (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

şi versorul normalei de componente:

$$\cos(\vec{n}, \overrightarrow{i}); \ \cos(\vec{n}, \overrightarrow{j}); \ \cos(\vec{n}, \overrightarrow{k})$$

Definiţia 4.8.1 *Se numeşte* **rotorul** *sau vârtejul câmpului vectorial $\vec{V}$ şi se notează cu rot $\vec{V}$ sau $\nabla \times \vec{V}$ vectorul:*

$$rot\ \vec{V} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\ \vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\ \vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ \vec{k}$$

Formula lui **Stokes** în scriere vectorială devine:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\ \vec{V} \cdot \vec{n}\ d\sigma$$

şi se poate enunţa astfel:

Definiţia 4.8.2 Circulaţia *unui câmp vectorial de-a-lungul unei curbe închise este egală cu fluxul rotorului câmpului vectorial printr-o suprafaţă mărginită de acea curbă.*

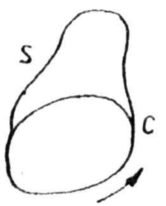


Fig58

Utilizând o scriere simbolică formula lui **Stokes** este:

$$\oint_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dy\,dx \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

unde:

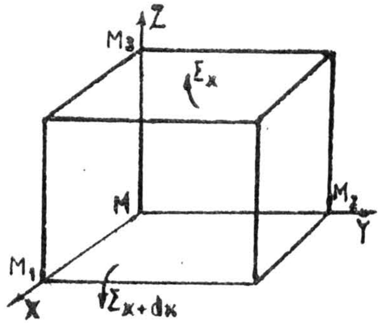
$$rot\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

□

Exprimarea rotorului câmpului vectorial $\overrightarrow{V}$, independentă de sistemul de referinţă , valabilă în orice punct M din D

$$\lim_{\mathcal{V}\to 0}\frac{\iint_S \vec{n}\times\vec{V}\,d\sigma}{\mathcal{V}} = rot\vec{V}\,|_M$$

Intr-adevăr , volumul elementar $\mathcal{V}$ al paralelipipedului este determinat de perechile de suprafeţe : $(x, x+dx)$; $(y, y+dy)$; $(z, z+dz)$



Deplasarea pe Ox se face în $M_1(x+dx, 0, 0)$ pe Oy în $M_2(0, y+dy, 0)$ şi pe Oz în $M_3(0, 0, z+dz)$.
Suprafaţa ce limitează volumul elementar $\mathcal{V}$ este:

$$\Sigma = \Sigma_x \cup \Sigma_{x+dx} \cup \Sigma_y \cup \Sigma_{y+dy} \cup \Sigma_z \cup \Sigma_{z+dz}$$

$$\mathcal{I}_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{n}\times\vec{V}\,d\sigma =$$

$$= \mathcal{I}_{(\Sigma_x,\Sigma_{x+dx})} + \mathcal{I}_{(\Sigma_y,\Sigma_{y+dy})} + \mathcal{I}_{(\Sigma_z,\Sigma_{z+dz})}$$

Dar :

$$\mathcal{I}_{(\Sigma_x,\Sigma_{x+dx})} = \mathcal{I}_{\Sigma_x} + \mathcal{I}_{\Sigma_{x+dx}}$$

Dar :

$$(\vec{n}\times\vec{V}\,d\sigma)_{\Sigma_x} = (-\vec{i}\times\vec{V}(M))dy\,dz$$

$$(\vec{n}\times\vec{V}\,d\sigma)_{\Sigma_{x+dx}} = \vec{i}\times(\vec{V}(M))_{\Sigma_{x+dx}}dy\,dz = \vec{i}\times[\vec{V}(M)+\frac{\partial\vec{V}(M)}{\partial x}dx]dy\,dz$$

$$\mathcal{I}_{(\Sigma_x,\Sigma_{x+dx})} = \vec{i}\times\frac{\partial\vec{V}(M)}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

pentru că :

$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0;\ \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k};\ \vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath}$

$$\mathcal{I}_{(\Sigma_y, \Sigma_{y+dy})} = \vec{\jmath} \times \frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial y} dx\ dy\ dz$$

$$\mathcal{I}_{(\Sigma_z, \Sigma_{z+dz})} = \vec{k} \times \frac{\partial \vec{V}(M)}{\partial z} dx\ dy\ dz$$

$$\mathcal{I}_\Sigma = [\vec{\imath} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{\jmath} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}] dx\ dy\ dz =$$

$$= [(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \frac{\partial Q}{\partial x} + (\vec{\imath} \times \vec{k}) \frac{\partial R}{\partial x} + (\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) \frac{\partial P}{\partial y} + (\vec{\jmath} \times \vec{k}) \frac{\partial R}{\partial y} + (\vec{k} \times \vec{\imath}) \frac{\partial P}{\partial z} + (\vec{k} \times \vec{\jmath}) \frac{\partial Q}{\partial z}) dx\ dy\ dz =$$

$$= \nabla \times \vec{V}\ dx\ dy\ dz$$

$$\Longrightarrow \quad rot\ \vec{V}\ |_M = \lim_{\mathcal{V} \to 0} \frac{\int\int_S \vec{n} \times \vec{V}\ d\sigma}{\mathcal{V}}$$

□

Proprietăţile rotorului

1. $rot(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = rot\ \vec{V}_1 + rot \vec{V}_2$

- Intr-adevăr,

$$rot\ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 + P_2 & Q_1 + Q_2 & R_1 + R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}) + \vec{\jmath}(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}) +$$

$$+ \vec{\imath}(\frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial z}) + \vec{\jmath}(\frac{\partial P_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}) =$$

$$= rot\ \vec{V}_1 + rot\ \vec{V}_2$$

□

2. $rot\ (\varphi\vec{V}) = grad\ \varphi \times \vec{V} + \varphi\ rot\ \vec{V}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix} = \vec{i}(\frac{\partial\varphi}{\partial y}R + \varphi\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Q - \varphi\frac{\partial Q}{\partial z}) +$$

$$+\vec{j}(\frac{\partial\varphi}{\partial z}P + \varphi\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}R - \varphi\frac{\partial R}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q + \varphi\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}P - \varphi\frac{\partial P}{\partial y}) =$$

$$= \vec{i}(\frac{\partial\varphi}{\partial y}R - \frac{\partial\varphi}{\partial z}Q) + \vec{j}(\frac{\partial\varphi}{\partial z}P - \frac{\partial\varphi}{\partial x}R) + \vec{k}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q - \frac{\partial\varphi}{\partial y}P) +$$

$$+\varphi[\vec{i}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \varphi \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= grad\ \varphi \times \vec{V} + \varphi\ rot\ \vec{V}$$

Capitolul 5

Operatori diferenţiali vectoriali şi scalari

5.1 Introducere.

Operatorii diferenţiali vectoriali şi scalari se construiesc cu operatorul **Hamilton** ∇ care în coordonate carteziene este:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Reguli generale de calcul cu operatorul ∇

1. Operatorul ∇ formează cu funcţia scalară sau vectorială căreia i se aplică un tot unitar.

2. Operatorul ∇ acţionează numai asupra funcţiilor aflate la dreapta sa. Din acest motiv într-un produs, operatorul ∇ nu poate fi factor ultim, în cazul când rezultatul este o funcţie .

3. Operatorul ∇ este liniar adică aditiv şi omogen. Notăm "$*$" legea de compoziţie între ∇ şi o funcţie scalară sau vectorială $\mathcal{F}$.
aditivitatea operatorului ∇ : $\nabla * (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) = \nabla * \mathcal{F}_1 + \nabla * \mathcal{F}_2$
omogeneitatea operatorului ∇ : $\nabla * (c\,\mathcal{F}) = c\,\nabla * \mathcal{F}$
linearitatea operatorului ∇:
$\nabla * (c_1\mathcal{F}_1 + c_2\mathcal{F}_2) = c_1\nabla * \mathcal{F}_1 + c_2\nabla * \mathcal{F}_2$

4. Operatorul ∇ aplicat asupra unui produs de n funcţii $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ conduce la sume de n funcţii noi, după regula derivării produsului şi după regulile calculului vectorial în care ∇ este considerat ca un vector simbolic

$$\nabla * (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \circ \dots \circ \mathcal{F}_n) = \nabla * (\underline{\mathcal{F}_1} \circ \mathcal{F}_2 \circ \dots \circ \mathcal{F}_n) + \dots$$
$$+\nabla * (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \circ \dots \circ \underline{\mathcal{F}_n})$$

sublinierea indică factorul asupra căruia acţionează operatorul ∇.

Dezvoltarea calculelor mai departe **depinde de natura** legilor de compoziţie.

5.2 Operatori de ordinul Intâi

Operatorii diferenţiali vectoriali şi scalari de ordinul întâi

1. Operatorul ∇ aplicat funcţiei scalare u prin operaţia de juxtapunere conduce la funcţia vectorială:

$$\nabla\ u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

2. Operatorul ∇ aplicat funcţiei vectoriale $\vec{V}$ prin produs scalar conduce la funcţia scalară:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

numită divergenţa câmpului $\vec{V}$.

3. Operatorul ∇ aplicat funcţiei vectoriale $\vec{V}$ prin produs vectorial conduce la funcţia vectorială:

$$\nabla \times \vec{V} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial P} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial Q} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial R}) \times (P\ \vec{i} + Q\ \vec{j} + R\ \vec{k})$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

numită rotorul câmpului vectorial $\vec{V}$. Liniile acestui determinant simbolic sunt compuse din elementele de natură diferite (nu numai scalari cum am studiat până acum). Acest determinant nu are proprietăţile unui determinant obişnuit; se dezvoltă numai după elementele primei linii.

1) Calculul gradientului, divergenţei şi rotorului unei sume de forma $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$

- $\nabla(u_1 + u_2) = \nabla\, u_1 + \nabla\, u_2$
- $\nabla \cdot (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \nabla \cdot \vec{V_1} + \nabla \cdot \vec{V_2}$
- $\nabla \times (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \nabla \times \vec{V_1} + \nabla \times \vec{V_2}$

2) Calculul gradientului, divergenţei şi rotorului unui produs de forma $a\mathcal{F}, a \in R$

- $\nabla(au) = a\nabla\, u$
- $\nabla \cdot (a\vec{V}) = a\nabla \cdot \vec{V}$
- $\nabla \times (a\vec{V}) = a\nabla \times \vec{V}$

3) Calculul gradientului, divergenţei şi rotorului unui produs de forma $u\mathcal{F}$

- $\nabla(u_1 u_2) = \nabla(\underline{u_1} u_2) + \nabla(u_1\, \underline{u_2}) = u_2 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_2$
- $\nabla \cdot (u_1 \vec{V}) = \nabla \cdot (\underline{u_1} \vec{V}) + \nabla \cdot (u_1 \underline{\vec{V}}) = \vec{V} \cdot \nabla\, u_1 + u_1 \nabla \cdot \vec{V}$
- $\nabla \times (u\vec{V}) = \nabla \times (\underline{u}\vec{V}) + \nabla \times (u\underline{\vec{V}}) = \nabla \underline{u} \times \vec{V} + u\nabla \times \vec{V} = u\nabla \times \vec{V} - \vec{V} \times \nabla u$

4) Calculul gradientului, divergenţei şi rotorului unui produs de forma $\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2$

a) $\nabla(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \nabla(\underline{\vec{V}}_1 \cdot \vec{V}_2) - \nabla(\vec{V}_1 \cdot \underline{\vec{V}}_2)$

Pentru calculul primului termen din memebrul drept utilizăm dublul produs vectorial:

$$\vec{V}_1 \times (\nabla \times \underline{\vec{V}}_2) = \nabla(\underline{\vec{V}}_2 \cdot \vec{V}_1) - \underline{\vec{V}}_2(\nabla \cdot \vec{V}_1) \Longrightarrow$$

$$\nabla(\underline{\vec{V}}_2 \cdot \vec{V}_1) = \vec{V}_1 \times (\nabla \times \underline{\vec{V}}_2) + (\vec{V}_1 \cdot \nabla)\underline{\vec{V}}_2 = \vec{V}_1 \times rot\ \vec{V}_2 + \frac{d\vec{V}_2}{d\vec{V}_1}$$

După ce se calculează şi cel de-al doilea termen din membrul drept printr-un procedeu analog, rezultă că gradientul produsului scalar a doi vectori este:

$$\nabla(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \times rot\ \vec{V}_2 - \vec{V}_2 \times rot \vec{V}_1 + \frac{d\vec{V}_2}{d\vec{V}_1} - \frac{d\vec{V}_1}{d\vec{V}_2}$$

b) $\nabla \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \nabla \cdot (\underline{\vec{V}}_1 \times \vec{V}_2) + \nabla \cdot (\vec{V}_1 \times \underline{\vec{V}}_2)$
$\nabla \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = (\nabla \times \underline{\vec{V}}_1) \cdot \vec{V}_2 - (\nabla \times \underline{\vec{V}}_2) \cdot \vec{V}_1 \Longrightarrow$

$$\nabla \cdot (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot (\nabla \times \vec{V}_1) - \vec{V}_1 \cdot (\nabla \times \vec{V}_2)$$

c) $\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \nabla \times (\underline{\vec{V}}_1 \times \vec{V}_2) + \nabla \times (\vec{V}_1 \times \underline{\vec{V}}_2) =$
$= \underline{\vec{V}}_1(\vec{V}_2 \cdot \nabla) - \vec{V}_2(\nabla \cdot \underline{\vec{V}}_1) + \vec{V}_1(\nabla \cdot \underline{\vec{V}}_2) - \underline{\vec{V}}_2(\vec{V}_1 \cdot \nabla) =$
$= (\vec{V}_2 \cdot \nabla)\underline{\vec{V}}_1 - \vec{V}_2(\nabla \cdot \underline{\vec{V}}_1) + \vec{V}_1(\nabla \cdot \underline{\vec{V}}_2) - (\vec{V}_1 \cdot \nabla)\underline{\vec{V}}_2 \Longrightarrow$

$$\nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \frac{d\vec{V}_1}{d\vec{V}_2} - \frac{d\vec{V}_2}{d\vec{V}_1} + \vec{V}_1 div \vec{V}_2 - \vec{V}_2 div \vec{V}_1$$

5.3 Operatori de ordinul al doilea

Operatori diferenţiali vectoriali şi scalari de ordinul al doilea

Prin aplicarea din nou a operatorului ∇ asupra funcţiei $\mathcal{F}_1 = \nabla * \mathcal{F}$ utilizând legea de compoziţie notată " $\circ$ " obţinem o nouă funcţie:

$$\mathcal{F}_2 = \nabla \circ \mathcal{F}_1 \ sau\ \mathcal{F}_2 = \nabla \circ (\nabla * \mathcal{F})$$

Dacă construim produsele obţinem următorul tablou cuprinzând nouă combinaţii din care numai cinci pot exista:

$\cancel{\nabla(\nabla u)}$	$\nabla \cdot (\nabla u)$	$\nabla \times (\nabla u)$
$\nabla(\nabla \cdot \vec{V})$	$\cancel{\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{V})}$	$\cancel{\nabla \times (\nabla \cdot \vec{V})}$
$\cancel{\nabla(\nabla \times \vec{V})}$	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V})$	$\nabla \times (\nabla \times \vec{V})$

1.*div grad* $u = \Delta u$

Intr-adevăr,

$$div\ grad\ u = div\ (\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$$

Expresia :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

se notează Δ (laplacian) şi se numeşte **operatorul lui Laplace**. Ecuaţia $\Delta u = 0$ se numeşte **ecuaţia lui Laplace**.

□

2. *rot grad* $u = \mathbf{O}$

Intr-adevăr,

$$rot\ grad\ u = rot(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}) + \vec{\jmath}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}) = \mathbf{O}$$

□

3. $grad\ div\vec{V} = \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) + \Delta\vec{V}$
Intr-adevăr,

$$grad\ div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\vec{\imath}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\vec{\jmath}+ \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\vec{k} =$$

$$= \vec{\imath}(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial z}) + \vec{\imath}(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2})+$$

$$+\vec{\jmath}(\frac{\partial^2 R}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}) + \vec{\jmath}(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2})+$$

$$+\vec{k}(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y\, \partial z}) + \vec{k}(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} + \Delta\vec{V} =$$

$$= \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) + \Delta\vec{V}$$

□

4. $div\ rot\vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$
Intr-adevăr,

$$div \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial y} = 0$$

$\square$

5.$rot\ rot\ \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta\vec{V}$
Intr-adevăr,

$$rot\ rot\ \vec{V} = \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta\vec{V}$$

$\square$

5.4 Calculul integral în teoria câmpurilor. Formule integrale

Formule integrale

1) Fie vectorul $\vec{A} = \varphi\ grad\psi$ unde φ şi ψ sunt două funcţii scalare cu derivate parţiale de ordinul al doilea continue pe $S \cup \Omega$ unde suprafaţa S este închisă şi să aplicăm formula **flux-divergenţei** sau (4.20) :

$$\iint_S \vec{n} \cdot \vec{A} d\sigma = \iiint_\Omega div\ \vec{A} d\omega$$

Dar

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = \vec{n} \cdot (\varphi\ grad\ \psi) = \varphi\vec{n} \cdot \nabla\psi = \varphi(\vec{n} \cdot \nabla)\psi = \varphi\frac{d\psi}{dn}$$

$$div\ \vec{A} = \nabla \cdot (\varphi\ grad\ \psi) = \nabla \cdot (\underline{\varphi}\nabla\psi) + \nabla \cdot (\varphi\underline{\nabla\psi}) = \nabla\psi \cdot \nabla\varphi + \varphi\Delta\psi$$

Rezultă:

$$\iint_S \varphi\frac{d\psi}{dn} d\sigma = \iiint_\Omega [\varphi\Delta\psi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi] d\omega \tag{5.1}$$

numită **prima formulă a lui Green**.

2) Fie $\varphi = 1$ obţinem din relaţia (5.1):

$$\iint_S \frac{d\psi}{dn} d\sigma = \iiint_\Omega \Delta\psi d\omega \tag{5.2}$$

3) In (5.1) vom schimba pe φ cu ψ şi obţinem:

$$\iint_S \psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = \iiint_\Omega (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) d\omega \tag{5.3}$$

Scăzând (5.1) şi (5.3) avem :

$$\iint_S (\varphi \frac{d\psi}{dn} d\sigma - \psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = \iiint_\Omega (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\omega \tag{5.4}$$

a doua formulă a lui Green.

4) Dacă în formula (4.20) înlocuim funcţia vectorială $\vec{V}(M)$ prin $\varphi(M)\vec{a}$, unde $\varphi(M)$ este o funcţie scalară de punctul M, cu derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $S \cup \Omega$ unde S este suprafaţă închisă iar $\vec{a}$ versorul unui vector constant oarecare, avem:

$$\iint_S \varphi(M)\vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_\Omega div(\varphi \vec{a}) d\omega$$

Dar

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi \vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \varphi + \varphi \underbrace{\nabla \cdot \vec{a}}_{=0} = \vec{a} \cdot \nabla \varphi$$

adică:

$$\vec{a} \cdot \iint_S \varphi(M) \vec{n} d\sigma = \vec{a} \cdot \iiint_\Omega grad\ \varphi d\omega$$

cum $\vec{a}$ este versorul unui vector constant oarecare şi cele două integrale din membrul stâng şi membrul drept, reprezintă vectori care au proiecţii egale pe orice direcţie, înseamnă că sunt egali, adică :

$$\iint_S \varphi(M)\ \vec{n} d\sigma = \iiint_\Omega grad\ \varphi\ d\omega \tag{5.5}$$

care se numeşte **formula gradientului**.

5) Dacă în formula (4.20) înlocuim pe $\vec{V}$ cu $\vec{V} \times \vec{a}$, unde $\vec{a}$ este versorul unui vector constant oarecare avem:

$$\iint_S (\vec{V} \times \vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_\Omega div(\vec{V} \times \vec{a})\ d\omega$$

$$\vec{a} \cdot \iint_S (\vec{n} \times \vec{V})\, d\sigma = \iiint_\Omega div(\vec{V} \times \vec{a})\, d\omega$$

dar : $div\,(\vec{V} \times \vec{a}) = \nabla \cdot (\vec{V} \times \vec{a}) = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \iint_S (\vec{n} \times \vec{V})\, d\sigma = \vec{a} \cdot \iiint_\Omega \nabla \times \vec{V}\, d\omega$$

şi cum $\vec{a}$ este un vector constant arbitrar şi cele două integrale reprezintă vectori care au proiecţii egale pe orice direcţie, înseamnă că sunt egali:

$$\iint_S (\vec{n} \times \vec{V}) d\sigma = \iiint_\Omega (\nabla \times \vec{V}) d\omega \tag{5.6}$$

formulă care se numeşte **formula rotorului**.

5.5 Clasificarea câmpurilor vectoriale

Această clasificare se face după modul cum este condiţionat câmpul vectorial $\vec{V}$.
Câmpurile acţionează într-un domeniu D cuprins în regiunea $\mathcal{R}$ (mono, bi sau tridimensional) pe care-l vom considera simplu conex sau multiplu conex, deoarece vom utiliza funcţii uniforme respectiv multiforme.

Definiţia 5.5.1 *Domeniul simplu conex este domeniul în care orice curbă $\mathcal{C}$ se poate strânge în jurul unui punct interior domeniului în mod continuu.*

Exemplu:
Interiorul unei sfere.

Definiţia 5.5.2 *Domeniul multiplu conex este domeniul în care există curbe C care nu se pot strânge în jurul unui punct interior în mod continuu.*

Exemple:
Interiorul unui tor, cilindru infinit.

Categoriile principale de câmpuri vectoriale

I. Câmpul uniform (constant) este câmpul vectorial $\vec{V}$ constant în mărime, dircţie şi sens în domeniul $D \subset \mathbf{R}$. Ecuaţia de definiţie: $\vec{V} = \vec{V}_o$.

II. Câmpul lamelar sau potenţial într-un domeniu D, un câmp de vectori de forma : $\vec{V}(M) = grad \quad \varphi(M), \varphi(M)$ este definită tot pe D.

III. Câmpul irotaţional într-un domeniu D este câmpul vectorial $\vec{V}(M)$ care are $rot\vec{V} = 0$ în toate punctele lui D.

Proprietăţi ale câmpului irotaţional $\vec{V}(M)$ într-un domeniu simplu cone

Propoziţia 5.5.1 *Circulaţia câmpului irotaţional $\vec{V}$ de-a-lungul oricărei curbe închise C conţinută într-un domeniu D este nulă.*

$$C = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int\int_S rot\ \vec{V}\vec{n}d\sigma = 0$$

Propoziţia 5.5.2 *Circulaţia câmpului irotaţional $\vec{V}$ de-a-lungul oricărui arc de curbă cu aceleaşi extremităţi în D, conţinut în întregime în D, nu depinde de arcul de curbă, depinde numai de extremităţi.*

Demonstraţie:

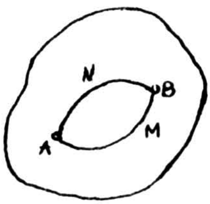


Fig.60

Intr-adevăr, fie două arce de curbă conţinute în domeniul $\mathcal{D}$, arcul $A\widehat{M}B$ şi arcul $A\widehat{N}B$. Fie curba închisă $\Gamma = AMBNA$

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{A\widehat{M}B} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{B\widehat{N}A} \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0; \quad \int_{A\widehat{M}B} \vec{V} \cdot d\vec{r} = + \int_{A\widehat{N}B} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

□

Propoziţia 5.5.3 *Orice câmp irotaţional este un câmp potenţial adică este gradientul unui câmp scalar.*

Demonstraţie:
Intr-adevăr, dintr-o proprietate a câmpurilor irotaţionale, rezultă că integrala curbilinie din vector nu depinde de drum. Fie $M_o(x_o, y_o, z_o)$ fixat în D şi $M(x, y, z)$ variabil în D. Avem:

$$\int_{M_0M} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz = \varphi(M_o, M) = \Phi(x, y, z)$$

se ştie că :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

prin urmare:

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x};\ Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; R = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

şi deci $\vec{V} = grad\ \Phi$ adică $\vec{V}$ este câmp potenţial.

□

Propoziţia 5.5.4 *Orice câmp potenţial este irotaţional.*

Demonstraţie:
Câmpul $\vec{V}$ potenţial înseamnă: $\vec{V} = grad\varphi$ urmează că:
$rot\vec{V} = rot\ grad\varphi = 0$. Dar $rot\vec{V} = 0$ înseamnă că $\vec{V}$ este irotaţional.

□

Exemple de câmpuri irotaţionale:

- Câmpul gravitaţional newtonian în regiuni în care se află mase atractive (în gravifică)
- Câmpul electrostatic $\overrightarrow{E}$ în regiuni care conţin sarcini electrice (în teoria câmpului electromagnetic).

Proprietăţi ale câmpului irotaţional $\vec{V}(M)$ într-un domeniu multiplu conex

Fie un câmp irotaţional $\vec{V}(M)$ într-un domeniu multiplu conex D. Intr-un domeniu multiplu conex se pot considera două tipuri de curbe închise.

a) Curbe C, cu proprietatea că există o suprafaţă S, mărginită de curba C, conţinută în domeniul D.

b) Curbe Γ, care nu au această proprietate. Curbele Γ sunt curbe care traversează **cel puţin una** din tăieturile pe care le putem face în domeniul multiplu conex D , pentru a obţine un domeniu simplu conex D'.

Definiţia 5.5.3 *Se numesc* **echivalente** *într-un domeniu multiplu conex D două curbe închise sau două arce de curbă, conţinute în acel domeniu, dacă fiecare tăietură este traversată de cele două curbe, sau arce de curbă de acelaş număr de ori şi în acelaş sens.*

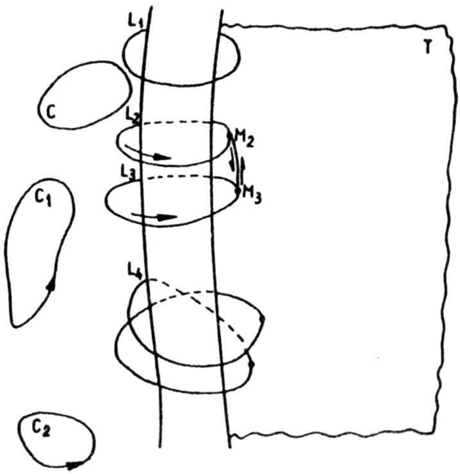


Fig.61

L_2 echivalent cu L_3 pentru că intersectează tăietura T o singură dată şi în acelaşi sens (Fig.61). L_2 nu este echivalent cu L_4 pentru că nu intersectează tăietura T de acelaşi număr de ori. L_2 intersectează tăietura T o dată şi L_4 intersectează tăietura T de două ori.

Propoziţia 5.5.5 *Circulaţia câmpului irotaţional $\vec{V}(M)$ pe două curbe echivalente este aceeaşi.*

Demonstraţie:

Cazul I Presupunem că avem două curbe C_1 şi C_2 din prima categorie, adică penru care există o suprafaţă mărginită de aceste curbe S_1 şi S_2, conţinute în întregime în domeniul D. Pentru determinarea circulaţiei pe aceste curbe putem aplica formula Stokes, deoarece câmpul este definit în toate punctele suprafeţelor S_1 şi S_2 şi avem:

$$\mathcal{C}_1 = \oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} rot\vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

$$\mathcal{C}_2 = \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} rot\vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$$

Cazul II Să presupunem că avem două curbe L_2 şi L_3 din categoria a doua, care traversează o singură dată o tăietură T şi numai una. Fie M_2 şi M_3 punctele în care curbele L_2 şi L_3 intersectează suprafaţa T şi M_2M_3 arc de curbă aparţinând tăieturii T.

Putem considera curba închisă:

$$C = L_2^+ \cup M_2M_3 \cup L_3^- \cup M_3M_2$$

care este o curbă de categoria întâi, care nu traversează nici o tăietură şi dacă curba L_2 este parcursă în sens direct curba L_3 este parcursă în sens invers. Pentru această curbă vom avea:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{V}\, d\sigma = 0$$

dar:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{M_2M_3} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{L_3^-} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{M_3M_2} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Cum:

$$\int_{M_2M_3} \vec{V} \cdot d\vec{r} = -\int_{M_3M_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad \text{şi} \quad \int_{L_3^-} \vec{V} \cdot d\vec{r} = -\int_{L_3^+} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \int_{L_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{M_2M_3} \vec{V} \cdot d\vec{r} - \int_{L_3^+} \vec{V} \cdot d\vec{r} - \int_{M_2M_3} \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{L_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{L_3^+} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Urmează că dacă curbele L_2 şi L_3 traversează o singură dată o tăietură T în sens direct circulaţia este aceeaşi. Demonstraţia se extinde şi la cazul când cele două curbe echivalente traversează de mai multe ori una sau mai multe tăieturi în acelaşi sens.

Definiţia 5.5.4 *Valoarea comună a circulaţiei pe curbe echivalente* **închise** *ce traversează tăietura T* **o singură dată** *poartă numele de* **constantă ciclică** k *asociată tăieturii T.*

Propoziţia 5.5.6 *Dacă o curbă închisă Γ, conţinută în domeniul D în care $\vec{V}(M)$ este irotaţional, traversează o singură tăietură T de n ori în sens direct, atunci circulaţia lui $\vec{V}(M)$ pe Γ este egală cu de n ori constanta ciclică corespunzătoare acestei tăieturi adică:*

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = n\, k$$

Demonstraţie: Să considerăm, pentru început, o curbă Γ care traversează de două ori tăietura T în sens direct (Fig.62). Fie A şi B punctele sale de intersecţie cu T. Unim pe A cu B printr-un arc de curbă trasat pe tăietura T. Circulaţia pe Γ este:

$$\mathcal{C}_{APBQRA} = \mathcal{C}_{APB} + \mathcal{C}_{BQRA} = \mathcal{C}_{BA} + \mathcal{C}_{APB} + \mathcal{C}_{BQRA} + \mathcal{C}_{AB} = \mathcal{C}_{BAPB} + \mathcal{C}_{BQRAB}$$

Curbele $(C_1) : BAPB$ şi $(C_2) : BQRAB$ sunt închise, traversează o singură dată tăietura T şi circulaţia pe aceste curbe are aceeaşi valoare k deci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{APBQRA} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} = 2k$$

In cazul în care curba Γ traversează tăietura T de n ori $(n > 2)$ în sens direct, (Fig.63) adăugând **arce trasate** pe n curbe echivalente se obţine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = nk$$

Se aplică metoda inducţiei complete. Am demonstrat pentru $n = 2$. Presupunem că:

$$\mathcal{C}_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_{n-1}B_{n-1}} = (n-1)k$$

Atunci: $\mathcal{C}_{A_1B_1A_2B_2\cdots A_nB_n} = \mathcal{C}_{A_2A_1} + \mathcal{C}_{A_1B_1A_2} + \mathcal{C}_{A_3A_2} + \mathcal{C}_{A_2B_2A_3} + \cdots + \mathcal{C}_{A_nA_{n-1}} + \mathcal{C}_{A_{n-1}B_{n-1}A_n} + \mathcal{C}_{\ nB_nA_1A_2\cdots A_n} =$
$= \mathcal{C}_{A_2A_1B_1A_2} + \mathcal{C}_{A_3A_2B_2A_3} + \cdots + \mathcal{C}_{A_nAn-1B_{n-1}A_n} + \mathcal{C}_{A_nB_nA_1A_2\cdots A_n}$
Utilizând presupunerea făcută pentru $n-1$ curbe echivalente avem:

$$\mathcal{C}_{A_1B_1A2B2\cdots A_nB_n} = (n-1)k + k = nk$$

Dacă curba Γ traversează tăietura de n ori în sens invers, atunci circulaţia pe Γ va fi $-nk$.

Fie două curbe L_1 şi L_2 ce unesc punctele A şi B cu deosebirea că L_1 nu traversează nici o tăietură iar L_2 traversează tăieturile $T_1, T_2, \cdots, T_p$ de $n_1, n_2, \cdots, n_p$ ori.

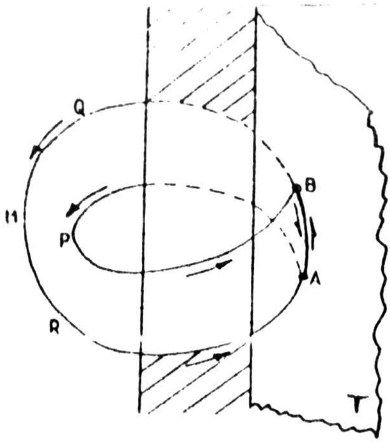


Fig62

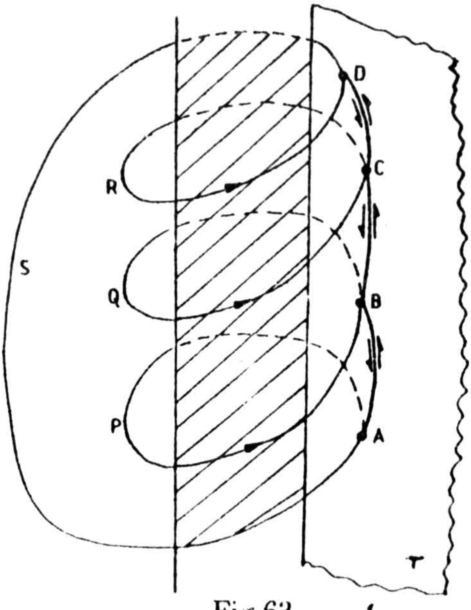


Fig.63

Din proprietăţile precedente rezultă : $L = L_1 \cup L_2$

$$\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_{L_1^-} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \oint_{L_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

dar: $\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{r} = \pm n_1 k_1 \pm n_2 k_2 \pm \cdots \pm n_p k_p$, adică:

$$\oint_{L_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_{L_1^-} \vec{V} \cdot d\vec{r} \pm n_1 k_1 \pm n_2 k_2 \pm \cdots \pm n_p k_p$$

Semnul + sau semnul − se alege în funcţie de sensul în care este traversată tăietura.

Propoziţia 5.5.7 *Un câmp irotaţional $\vec{V}(M)$ într-un domeniu multiplu conex este un câmp potenţial adică este gradientul unui câmp scalar.*

Demonstraţie:

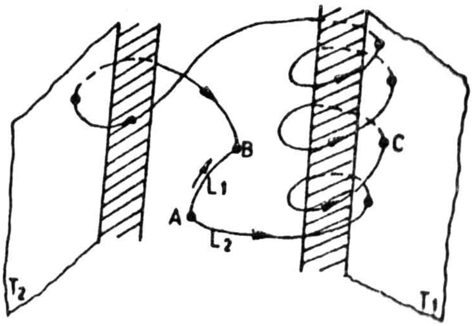


Fig.64

Fie $A(x_o, y_o, z_o)$ fixat în D şi $B(x, y, z)$ variabil în $\mathcal{D}$ (Fig.64) atunci:

$$\begin{aligned} &\int_{L_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \varphi(A, B) = \varphi(x, y, z) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dar ştim că:

$$\int_{L_2} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} \pm n_1 k_1 \pm n_2 k_2 \pm \cdots \pm n_p k_p \tag{5.8}$$

Din relaţiile (5.7) şi (5.8) rezultă:

$$\int_{L_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^{p} \pm n_i k_i = \varphi(x, y, z)$$

Notăm $\varphi_o(x, y, z) = \int_{L_1} \vec{V} \cdot d\vec{r}$ numită **determinare principală** a funcţiei $\varphi(x, y, z)$.

$\varphi(x, y, z) = \varphi_o(x, y, z) + \sum_{i=1}^{p} \pm n_i k_i$. Cum

$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ rezultă că: $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ deci: $\vec{V} = grad\ \varphi(x, y, z)$ adică gradientul funcţiei $\varphi(x, y, z)$ este egal cu $\vec{V}(M)$ în tot domeniul D' obţinut din D prin introducerea celor p tăieturi.

5.6 Câmp solenoidal

Definiţia 5.6.1 *Numim* **câmp solenoidal** *într-un domeniu D câmpul vectorial $\vec{V}(M)$ care are divergenţa nulă în toate punctele domeniului D adică:*

$$div\ \vec{V}(M) = 0.$$

Propoziţia 5.6.1 *Dacă câmpul $\vec{V}(M)$ este continuu în domeniul D şi pe suprafaţa S care mărgineşte acest domeniu şi* **solenoidal** *în domeniul D , atunci fluxul lui $\vec{V}(M)$ prin orice suprafaţă închisă Σ conţinută în domeniul D este* **nul**.

Demonstraţie:
$\vec{V}(M)$ este solenoidal adică $div\ \vec{V}(M) = 0$ şi deci:

$$\iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} div\ \vec{V} d\omega = 0$$

S-a aplicat formula flux-divergenţă. Rezultă că în interiorul unui domeniu Ω mărginit de suprafata inchisă S pentru care $\vec{V}$ este solenoidal nu pot fi izvoare sau puţuri.

□

Propoziţia 5.6.2 *Fluxul unui câmp $\vec{V}(M)$ solenoidal este acelaşi prin orice suprafaţă S subântinsă de o curbă C.*

Demonstraţie:

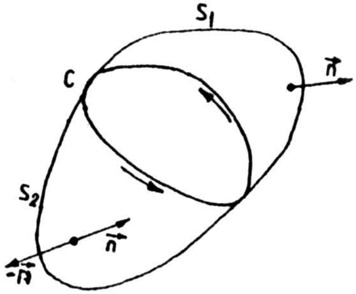


Fig.65

$$S = S_1 \cup S_2; \quad \iint\limits_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int\int_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int\int_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

Dar: $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega div\, \vec{V} d\omega = 0$

cum: $\vec{n}_{S_1} = -\vec{n}_{S_2}$ avem $\int\int_{S_1} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma - \int\int_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$

Dar de pe suprafaţa S_2 vedem însă sensul de parcurs pe curba C invers decât după S_1. Folosind sensul direct de parcurgere avem:

$$\iint\limits_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Propoziţia 5.6.3 *Fluxul unui câmp $\vec{V}(M)$ solenoidal prin orice secţiune transversală într-un tub de vectori (sau tub de curent) este acelaşi:* $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2}$.

Demonstraţie:

Să considerăm suprafaţa S mărginită de curba închisă C. Prin fiecare punct al suprafeţei S trece o linie de câmp L cu proprietatea:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \text{ sau } \vec{V} \cdot \vec{n} = 0.$$

Liniile L generează un domeniu D mărginit de o suprafaţă Σ_l, D este numit **tub de vectori** iar Σ_l **suprafaţa tubului de vectori** (Fig.66)
.

Fie S_1 şi S_2 două secţiuni în tubul de vectori şi S_l porţiunea din Σ_l cuprinsă între cele două secţiuni . $\mathbf{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ **este suprafaţa** închisă care mărgineşte un domeniu Ω închis.
Cu formula flux-divergenţă:

$$\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_\Omega div\, \vec{V} = 0$$

dar:

$$\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{S_l} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

Dar pe suprafaţa S_l avem: $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, pe suprafaţa S_1 : $\vec{n}_{S_1} = +\vec{n}_{S_l}$ şi pe suprafaţa S_2 : $\vec{n}_{S_2} = -\vec{n}_{S_l}$. Rezultă:

$$\iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = I$$

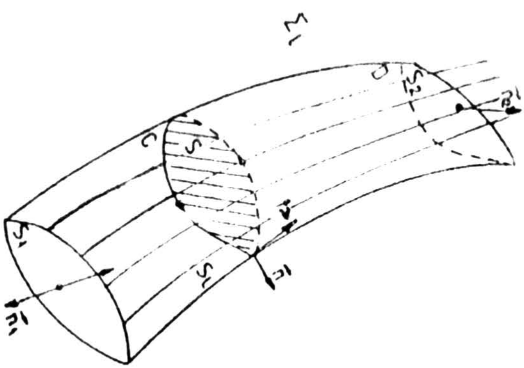


Fig.66

Definiţia 5.6.2 *Fluxul printr-o secţiune în tub notat I, se numeşte* **intensitatea tubului de vectori**.

Propoziţia 5.6.4 *Condiţia necesară şi suficientă ca un câmp vectorial $\vec{V}(M)$ definit în D să fie* **solenoidal** *este ca în orice punct din D să existe câmpul vectorial $\vec{W}(M)$ astfel încât să fie satisfăcută relaţia:*

$$\vec{V}(M) = rot\ \vec{W}(M)$$

$\vec{W}(M)$ se numeşte **potenţial vector** *al câmpului solenoidal $\vec{V}(M)$.*

Demonstraţie:
Suficienţa: Dacă există $\vec{W}(M)$ satisfăcând relaţia: $\vec{V} = rot\ \vec{W}$ atunci:

$$div\ \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{W} = 0$$

Necesitatea: Ipoteza problemei este $div\ \vec{V} = 0$ şi trebuie găsit vectorul $\vec{W}(M)$ ce satisface ecuaţia:

$$\vec{V} = rot\ \vec{W} \tag{5.9}$$

Construim o soluţie particulară a ecuaţiei. Pentru aceasta raportăm câmpurile vectoriale $\vec{V}$ şi $\vec{W}$ la triedrul $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ şi avem:

$$\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$$

$$\vec{W} = W_1\vec{i} + W_2\vec{j} + W_3\vec{k}$$

Dar:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}$$

adică:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_3}{\partial y} - \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & = & V_1 \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial z} - \dfrac{\partial W_3}{\partial x} & = & V_2 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x} - \dfrac{\partial W_1}{\partial y} & = & V_3 \end{cases} \tag{5.10}$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt funcţii cunoscute şi W_1, W_2, W_3 sunt funcţii necunoscute. Vrem să determinăm numai o **soluţie particulară** a acestui sistem, de aceea putem **particulariza problema cât este posibil** ca să integrăm mai uşor.

Căutăm soluţii cu $W_3(x,y,z) = 0$ şi sistemul de mai sus devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_2}{\partial z} & = & -V_1 \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial z} & = & V_2 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x} - \dfrac{\partial W_1}{\partial y} & = & V_3 \end{cases} \tag{5.11}$$

Din prima relaţie a sistemului:

$$W_2 = -\int_{z_0}^{z} V_1(x,y,t)dt + f(x,y)$$

Din a doua relaţie a sistemului:

$$W_1 = \int_{z_0}^{z} V_2(x,y,t)dt + g(x,y)$$

cu $f(x,y)$ şi $g(x,y)$ funcţii arbitrare. Cu funcţiile $W_1(x,y,z)$ şi $W_2(x,y,z)$ astfel determinate se verifică cea de-a treia ecuaţie a sistemului:

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial V_1(x,y,t)}{\partial x}dt + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial V_2(x,y,t)}{\partial y}dt + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

Inlocuind avem :

$$-\int_{z_0}^{z}(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y})dt + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = V_3$$

Cum $\vec{V}(M)$ este solenoidal adică $div\ \vec{V} = 0$ avem:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = -\frac{\partial V_3}{\partial z}$$

avem:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial V_3}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = V_3(x,y,z)$$

$$V_3(x,y,z) - V_3(x,y,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = V_3(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = V_3(x, y, z_o)$$

Particularizând funcţia $g(x, y) = 0$ obţinem: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = V_3(x, y, z_0)$ adică:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} V_3(t, y, z_o)dt + \varphi(y)$$

Pentru $\varphi(y) = 0$ am determinat o soluţie particulară a sistemului (5.11), deci un vector $\overrightarrow{W}^o$ care verifică ecuaţia: $rot\ \overrightarrow{W}^o = \vec{V}$ vectorul $\overrightarrow{W}^o$ este un **potenţial vector** al câmpului $\vec{V}$ şi este dat de:

$$\vec{W}^o = \vec{\imath}\int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \vec{\jmath}[-\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \int_{x_0}^{x} V_3(t, y, z_o)dt]$$

Dacă vectorului $\vec{W}^o$ îi adăugăm gradientul unei funcţii scalare φ arbitrare, obţinem tot o soluţie a sistemului (5.11) deci tot un potenţial vector:

$$\vec{W} = \vec{W}^o + grad\ \varphi \tag{5.12}$$

unde $rot\ \vec{W} = rot\ \vec{W}^o + rot\ grad\ \varphi$. Dar $rot\ grad\ \varphi = 0$ deci: $rot\ \vec{W} = rot\ \vec{W}^o = \vec{V}$.

□

Propoziţia 5.6.5 *Două soluţii $\vec{W}$ şi $\vec{U}$ ale ecuaţiei (5.10) diferă prin gradientul unei funcţii scalare.*

Demonstraţie:
$\vec{W}$ şi $\vec{C}$ soluţii ale ecuaţiei (5.10) înseamnă: $rot\vec{W} = \vec{V}$ şi $rot\ \vec{C} = \vec{V}$. Prin scăderea acestora avem: $rot(\vec{W} - \vec{C}) = 0$. Deoarece orice câmp irotaţional este un câmp potenţial avem: $\vec{W} - \vec{C} = grad\ \varphi \Longrightarrow \vec{W} = \vec{C} + grad\ \varphi$. Deci $\vec{W}$ se exprimă sub forma (5.12).

□

5.7 Câmp laplacian

Numim **câmp laplacian sau armonic** câmpul $\vec{V}(M)$ care este simultan irotaţional şi solenoidal într-un domeniu D din $\mathbf{R}$ adică:

$$rot\ \vec{V}(M) = 0\ ; \quad div\ \vec{V}(M) = 0.$$

Dacă câmpul este irotaţional: $\vec{V} = grad\ f(M)$ deci $\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \nabla f$ cum $\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Longrightarrow \nabla \cdot \vec{V} = \Delta f = 0$ adică:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Prin urmare un câmp vectorial armonic este un :

- câmp vectorial potenţial
- al cărui potenţial satisface ecuaţia lui Laplace.

Soluţiile ecuaţiei Laplace se mai numesc şi funcţii armonice.

Presupunem în continuare că funcţiile armonice sunt definite într-un domeniu D mărginit de suprafaţa închisă S.

Teorema 5.7.1 *Pentru funcţia armonică ψ avem:*

$$\iint_S \frac{d\psi}{dn} d\sigma = 0$$

Demonstraţie: Utilizând prima formulă a lui Green obţinem:

$$\iint_S \varphi \frac{d\psi}{dn} d\sigma = \iiint_\Omega (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi\Delta\psi) d\omega$$

Pentru $\varphi = 1$ şi ψ armonică adică $\Delta\psi = 0$

$$\iint_S \frac{d\psi}{dn} d\sigma = 0$$

$\square$

Teorema 5.7.2 *Dacă φ şi ψ sunt armonice are loc relaţia:*

$$\iint_S (\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}) d\sigma = 0$$

Demonstraţie:
Utilizând a doua formulă a lui Green obţinem:

$$\iint_S (\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn})d\sigma = \iiint_\Omega (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)d\omega$$

dar $\Delta\varphi = 0$ şi $\Delta\psi = 0$ prin urmare:

$$\int\int_S (\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn})d\sigma = 0$$

□

Teorema 5.7.3 *O funcţie $f(M)$ armonică diferită de o constantă nu poate avea un maxim sau minim în D.*

Demonstraţie:
Dacă funcţia armonică $f(M)$ ar avea un maxim în punctul $M_o(x_o, y_o, z_o)$ din D, atunci în M_o ar trebui să fie satisfăcută condiţia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f < 0$$

în contradicţie cu ipoteza $\Delta f = 0$. Dacă se presupune că în M_o funcţia f are un minim, atunci este necesar ca în M_o să fie satisfăcută condiţia $\Delta f > 0$, în contradicţie cu ipoteza $\Delta f = 0$. Din teorema de mai sus rezultă că o funcţie armonică în D îşi atinge valorile maximă şi minimă pe frontiera S a lui D.

□

Câmp biscalar

Definiţia 5.7.1 *Câmp biscalar este câmpul vectorial $\vec{V}$ care satisface ecuaţia: $\vec{V} = \lambda$ grad u unde λ şi u sunt funcţii scalare nenule.*

Propoziţia 5.7.1 *În fiecare punct din domeniul D în care câmpul biscalar $\vec{V}(M)$ este definit, $\vec{V}$ este perpendicular pe rotorul său:*

$$\vec{V} \cdot rot\ \vec{V} = 0$$

Demonstraţie:
$rot\vec{V} = rot(\underline{\lambda}\; grad\; u) + rot(\lambda\nabla\underline{u}) = \nabla\underline{\lambda}\times\nabla u + \lambda\nabla\times(\nabla u) = -\nabla u\times\nabla\lambda$

$$\vec{V}\cdot rot\;\vec{V} = -\lambda\;\nabla u\cdot(\nabla u\times\nabla\lambda) = 0$$

□

Propoziţia 5.7.2 *Câmpul biscalar $\vec{V}$ nu admite un potenţial scalar din care să derive , adică nu există o funcţie φ aşa fel încât $\vec{V}$ să poată fi scris $\vec{V} = grad\;\varphi$*

Demonstraţie:
Intr-adevăr, dacă $\vec{V}$ ar deriva dintr-un potenţial φ, atunci el ar trebui să fie irotaţional, adică: $rot\vec{V} = 0$. Dar $rot\vec{V} = -grad\; u \times grad\;\lambda \neq 0$ pentru orice λ şi u.

□

5.8 Câmpul general (oarecare)

Definiţia 5.8.1 *Câmpul general este câmpul vectorial $\vec{V}(M)$ care nu este supus nici uneia din condiţiile indicate la tipurile precedente, dar care poate fi supus altor condiţii.*

Propoziţia 5.8.1 *Câmpul general $\vec{V}$ poate fi descompus într-un câmp irotaţional şi un câmp solenoidal $\vec{V} = \vec{V}_i + \vec{V}_s$ cu condiţiile ca:*
$rot\;\vec{V} = rot\;\vec{V}_s$ şi $div\;\vec{V} = div\;\vec{V}_i$.

Demonstraţie:

$$div\;\vec{V} = div\;\vec{V}_i + div\;\vec{V}_s = div\;\vec{V}_i$$

$$rot\;\vec{V} = rot\;\vec{V}_i + rot\;\vec{V}_s = rot\;\vec{V}_s$$

pentru că $div\;\vec{V}_s = 0$ si $rot\;\vec{V}_i = 0$.

□

5.9 Determinări de câmpuri.

Determinarea unui câmp scalar de gradient dat .

Fie câmpul vectorial :

$\overrightarrow{V} = grad\varphi$

cunoscut , se cere să determinăm funcţia $\varphi(x, y, z)$.

Problema este posibilă dacă $rot\overrightarrow{V} = 0$ adică :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

In aceste ipoteze , functia φ va fi determinată de sistemul :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x, y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R(x, y, z) \end{cases}$$

Rezultă :

$d\varphi = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

şi : $\varphi(x, y, z) = \int_{M_o M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

unde $M_o$este un punct fix si M un punct arbitrar din domeniul D . Funcţia $\varphi(x, y, z)$ este determinată în afară de o constantă arbitrară şi este după cum am definit-o **potenţialul scalar al câmpului** $\overrightarrow{V(M)}$.

□

Exemplu : Să se determine potenţialul scalar al câmpului :
$\vec{V} = (yz + 4z)\vec{i} + (xz + 4y)\vec{j} + (xy + 4x)\vec{k}$

Condiţia ca $\vec{V}$ să admită un potenţial scalar $rot\,\vec{V} = 0$ este îndeplinită

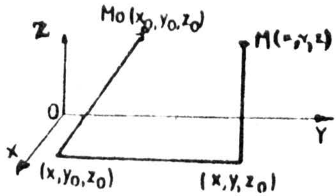


Fig.67

Câmpul este potenţial $\vec{V} = grad\varphi$ adică :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = & yz + 4z \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = & xz + 4y \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = & xy + 4x \end{cases}$$

Funcţia:

$$\varphi = \int_{M_0M} (yz + 4z)dx + (xz + 4y)dy + (xy + 4x)dz =$$

$$\int_{x_o}^{x}(y_o z_o + 4z_o)dx + \int_{y_o}^{y}(xz_o + 4y)dy + \int_{z_o}^{z}(xy + 4x)dz$$

$$\varphi = \int_{M_0M} (yz + 4z)dx + (xz + 4y)dy + (xy + 4x)dz =$$

$$= \int_{x_o}^{x}(y_o z_o + 4z_o)dx + \int_{y_o}^{y}(xz_o + 4y)dy + \int_{z_o}^{z}(xy + 4x)dz \ ;$$

$$\varphi = xyz + 4xz + 2y^2 - \underbrace{(x_o y_o z_o + 4x_o z_o + 2y_o^2)}_{-C}$$

adică : $\varphi(x, y, z) = xyz + 4xz + 2y^2 + C$

Determinarea unui câmp vectorial de rotor şi divergenţă dată

Se defineşte într-un domeniu D funcţia $\rho(x,y,z)$ şi vectorul $\overrightarrow{U}(x,y,z)$. Se cere să se determine câmpul vectorial $\overrightarrow{V}$ care să aibă rotorul egal cu $\overrightarrow{U}$ şi divergenţa egală cu ρ , deci :

$$rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U}(x,y,z)$$
$$div\ \overrightarrow{V} = \rho(x,y,z)$$

Problema este posibilă dacă :

$$div\overrightarrow{U} = 0$$

Se vor rezolva câteva cazuri particulare :

I .) Determinarea unui câmp irotaţional şi solenoidal

$$(S_1) \quad \begin{cases} rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \\ div\ \overrightarrow{V} = 0 \end{cases}$$

Din $rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ rezultă $\overrightarrow{V} = grad\varphi$ şi $div\ \overrightarrow{V} = \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$
Soluţia sistemului este:

$$\overrightarrow{V} = grad\varphi \text{ unde } \Delta\varphi = 0 \text{ adică } \varphi \text{ este armonică .}$$

Ecuaţia $\Delta\varphi = 0$ este numeşte *ecuaţia lui Laplace.*

II .) Determinarea unui câmp irotaţional de divergenţă dată .

$$(S_2) \quad \begin{cases} rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \\ div\ \overrightarrow{V} = \rho(x,y,z) \end{cases}$$

Din $rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ rezultă $\overrightarrow{V} = grad\varphi$ şi $div\ \overrightarrow{V} = \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = \rho(x,y,z)$
Soluţia sistemului este:

$$\overrightarrow{V} = grad\varphi \text{ unde } \Delta\varphi = \rho(x,y,z)$$

Ecuaţia $\Delta\varphi = \rho(x,y,z)$ se numeşte *ecuaţia lui Poisson* .

III .) Determinarea unui câmp solenoidal de rotor dat .

$$(S_3) \qquad \begin{cases} rot\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \\ div\,\overrightarrow{V} = 0 \end{cases}$$

Din $div\,\overrightarrow{V} = 0$ rezultă

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$$

Din ecuaţia $rot\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U}$ se construieşte o soluţie particulară $\overrightarrow{V}^0$ (ca la proprităţile câmpurilor irotaţionale) . Soluţia ecuaţiei este:

$$\overrightarrow{V} = grad\varphi + \overrightarrow{V}^0$$

unde φ este o funcţie arbitrară. Dar $div\,\overrightarrow{V} = 0 \Longleftrightarrow$

$$div\,\overrightarrow{V}^0 + \nabla\cdot\nabla\varphi = 0$$

$$\Delta\varphi = -div\,\overrightarrow{V}^0$$

este *ecuaţie Poisson*

Soluţia sistemului este:

$\overrightarrow{V} = grad\varphi + \overrightarrow{V}^0$ unde φ este potentialul scalar ce verifică :

$$\Delta\varphi = -div\,\overrightarrow{V}^0$$

IV .) Determinarea unui câmp de rotor dat şi de divergenţă dată.

$$(S_4) \qquad \begin{cases} rot\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \\ div\,\overrightarrow{V} = \rho(x,y,z) \end{cases}$$

Vom căuta soluţia sistemului (S_4) ca sumă de doi vectori: $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ unde $\overrightarrow{V_1}$ şi $\overrightarrow{V_2}$ satisfac condiţiile:

$$\begin{cases} rot\ \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{U} \\ div\ \overrightarrow{V_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\ \overrightarrow{V_2} = 0 \\ div\ \overrightarrow{V_2} = \rho(x, y, z) \end{cases}$$

$\overrightarrow{V_1}$ este soluţie a sistemului (S_3) şi $\overrightarrow{V_2}$ este soluţie a sistemului (S_2)
Rezultă că soluţia sistemului (S_4) este :
$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ unde : $rot\,\overrightarrow{V} = rot\ \overrightarrow{V_1} + rot\ \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{U}$
$div\,\overrightarrow{V} = div\ \overrightarrow{V_1} + div\ \overrightarrow{V_2} = \rho(x, y, z)$

Capitolul 6

Coordonate curbilinii generalizate

Coordonatelor curbilinii generalizate . Coordonate curbilinii ortogonale . Operatori diferenţiali în coordonate curbilinii ortogonale .

6.1 Coordonatelor curbilinii generalizate

Rezolvarea multor probleme practice se poate uşura dacă se folosesc coordonatele curbilinii diferite de cele carteziene .

Trecerea de la coordonatele carteziene (x, y, z) la coordonatele curbilinii (q_1, q_2, q_3) se face pe baza biunivocităţii între punctele spaţiului şi coordonatele lui prin relaţiile :

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases}$$

Vectorul de poziţie :

$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ în noile coordonate este :

$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$

Deplasările punctului M pe curbele de coordonate sunt :

$$\overrightarrow{MM_1} = dr_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1$$

$$\overrightarrow{MM_2} = dr_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2$$

$$\overrightarrow{MM_3} = dr_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

Să considerăm versorii tangenţi (Fig.68) la curbele de coordonate q_1, q_2, q_3 şi să-i notăm cu :

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$$

Dar pe curba coordonată q_1 variază numai q_1 ;

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$$

este un vector tangent la curba q_1 .

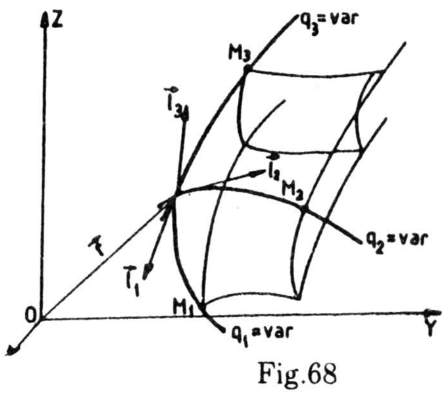


Fig.68

Notăm prin :

$$H_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| \ ; \ H_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right| \ ; H_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right|$$

deci:

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_1} = H_1 \overrightarrow{e_1} \ ; \ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_2} = H_2 \overrightarrow{e_2} \ ; \ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_3} = H_3 \overrightarrow{e_3}$$

Cum :

$$\frac{\partial (x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k})}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \overrightarrow{k}$$

vom avea :

$$\mid \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} \mid^2 = H_i^2 = (\frac{\partial x}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_i})^2 \ ; \ i = \{1, 2, 3\}$$

Cantităţile H_1 ; H_2 ; H_3 se numesc **coeficientii lui Lamè .**

Să considerăm şi versorii normali la suprafeţele de coordonate :

$$q_1 = q_1^o \ ; \ q_2 = q_2^o \ ; \ q_3 = q_3^o$$

şi să-i notăm cu $\overrightarrow{n_1}$; $\overrightarrow{n_2}$; $\overrightarrow{n_3}$.
Vectorii $grad\ q_i$ sunt normali la suprafeţele :

$$q_i = q_i^o \ ; \ i = \{1, 2, 3\}$$

prin urmare :

$$\overrightarrow{n_i} = \frac{1}{\mid grad\ q_i \mid} grad\ q_i \ ; i = \{1, 2, 3\}$$

unde :

$$h_i = \mid grad\ q_i \mid \ ; i = \{1, 2, 3\}$$

adică :

$$\overrightarrow{n_i} = \frac{1}{h_i} grad\ q_i \ ; i = \{1, 2, 3\}$$

Se deduce că :

$$grad\ q_i = h_i \overrightarrow{n_i}; i = \{1,2,3\}$$

Dar :

$$grad\ q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\overrightarrow{k}; i = \{1,2,3\}$$

deci :

$$h_i^2 = (\frac{\partial q_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial q_i}{\partial y})^2 + (\frac{\partial q_i}{\partial z})^2 \ ; \ i = \{1,2,3\}$$

Cantitățile h_i ; $i = \{1,2,3\}$ se numesc **parametrii diferențiali de ordinul întâi** .

Definiția 6.1.1 *Vectorii:* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ *și* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ *formează un sistem de vectori* **reciproci** *unii față de ceilalți , dacă sunt îndeplinite relațiile:*

$$\begin{cases} \vec{u}_i.\vec{v}_i = 1 \ \text{și} \\ \vec{u}_i.\vec{v}_j = 0 \ \text{pentru}\ i \neq j \end{cases}$$

Să arătăm că vectorii $grad\ q_i$ formează un sistem de vectori reciproci cu

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i}.$$

Pentru aceasta trebuie să arătăm că avem:

$$\begin{cases} grad\ q_i.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = 1 \ \text{și} \\ grad\ q_i.\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_j} = 0 \ \text{ pentru } \ (i \neq j)\ UV \end{cases}$$

Dar din :

$$d\overrightarrow{r}(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_3}dq_3$$

înmulțind scalar cu $grad\ q_i$ ambii membri obținem :

$$dq_i = grad\, q_i . d\vec{r} = (grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1})dq_1 + (grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2})dq_2 + (grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3})dq_3$$

şi cum dq_1 , dq_2 , dq_3 sunt independenţi , rezultă că pentru :

$$\begin{array}{llll} i=1 \Longrightarrow & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0 \\ i=2 \Longrightarrow & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 0 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 1 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0 \\ i=3 \Longrightarrow & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 0 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0 \; ; & grad\, q_i . \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 1 \end{array}$$

□

6.2 Coordonate curbilinii ortogonale .

Sunt coordonatele curbilinii al căror curbe de coordonate sunt perpendiculare două câte două în orice punct M al domeniului . Rezultă că pentru coordonatele curbilinii ortogonale , vectorii :

$\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$ coincid cu vectorii : $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ şi sunt perpendiculari doi câte doi , deci avem relaţiile :

$$\vec{n_i} = \vec{e_i} \; , \; \vec{n_i} \cdot \vec{n_j} = 0 \; , \; \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0 \tag{6.1}$$

pentru $i \neq j$

Dar pentru ca un sistem de coordonate curbilinii să fie ortogonal trebuie ca:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0 \quad \text{şi}$$

$$grad\, q_i \cdot grad\, q_j = \frac{\partial q_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial y} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial z} \quad \text{pentru} \quad i \neq j$$

Dacă coordonatele curbilinii sunt ortogonale , putem găsi o relaţie între coeficienţii lui Lamè H_i şi parametrii diferenţiali de ordinul întâi h_i .Avem :

$$grad\ q_i = h_i\ \overrightarrow{e_i}\ \text{şi}\ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = H_i\ \overrightarrow{e_i}$$

Din relaţiile de reciprocitate :

$$grad\ q_i\ \cdot\ \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_i} = 1$$

adică :

$$h_i\ \overrightarrow{e_i} \cdot H_i\ \overrightarrow{e_i}\ = 1 \Longrightarrow\ h_i\ \cdot H_i\ = 1 \Longrightarrow h_i\ = \frac{1}{H_i}\ \text{ pentru } i = \{1, 2, 3\}$$

Pentru vectorii $grad\ q_i$ se obţin relaţiile :

$$grad\ q_i = h_i \overrightarrow{n_i} \Longrightarrow grad\ q_i = \frac{1}{H_i} \overrightarrow{n_i}\ \text{ pentru }\ i = \{1, 2, 3\}$$

□

Elementul liniar în coordonate curbilinii ortogonale .

Să raportăm vectorul $d\overrightarrow{r}$ la vectorii $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Vom avea :

$$d\overrightarrow{r} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_3}dq_3 = H_1 dq_1 \overrightarrow{e_1} + H_2 dq_2 \overrightarrow{e_2} + H_3 dq_3 \overrightarrow{e_3}$$

$$H_1 dq_1\ ;\ H_2 dq_2\ ;\ H_3 dq_3$$

se numesc **componentele curbilinii** ale vectorului $d\overrightarrow{r}$. Dar :

$$d\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r} = ds^2$$

şi cu relaţiile precizate între $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$,$\overrightarrow{e_3}$ avem:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \tag{6.2}$$

numit *elementul de arc în coordonate curbilinii ortogonale* .

Elementul de volum în coordonate curbilinii ortogonale.

Se ştie că :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{r}_1 &= \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_1} dq_1 \Longrightarrow d\overrightarrow{r}_1 = H_1 dq_1 \overrightarrow{e_1} \\ d\overrightarrow{r}_2 &= \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_2} dq_2 \Longrightarrow d\overrightarrow{r}_2 = H_2 dq_2 \overrightarrow{e_2} \\ d\overrightarrow{r}_3 &= \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial q_3} dq_3 \Longrightarrow d\overrightarrow{r}_3 = H_3 dq_3 \overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

dar *elementul de volum* este produsul mixt al celor trei vectori elementari:

$$dV = (H_1 dq_1 \overrightarrow{e_1}\ ,\ H_2 dq_2 \overrightarrow{e_2}\ ,\ H_3 dq_3 \overrightarrow{e_3})$$

adică :

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 (\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_3})$$

Dacă sistemul este ortogonal $(\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_3}) = 1$ elementul de volum este :

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{6.3}$$

Tipuri de coordonate curbilinii ortogonale

Coordonatele cilindrice.

Între coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) şi cele carteziene (x, y, z) există relaţiile (Fig.69):

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta & \qquad & \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin \theta & \text{şi} \qquad & \theta = arctg \tfrac{y}{x} \\ z &= z & & z = z \end{aligned}$$

Cu notaţiile de la coordonatele curbilinii generalizate avem :
$q_1 = \rho, q_2 = \theta\ , q_3 = z$

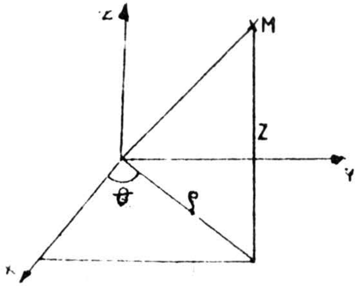


Fig. 69

$$\overrightarrow{r} = \rho\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \rho\sin\theta\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\,; \qquad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\rho} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \rho\cos\theta\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}\,; \qquad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial z} = \overrightarrow{k}$$

Se obţine :

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} = 0\ ;\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial z} = 0\ ;\ \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial z} = 0$$

Coeficienţii lui Lamè în coordonate cilindrice sunt :

$$H_1 = \left|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$H_2 = \left|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \rho; \quad H_3 = 1$$

Elementul de arc în coordonate cilindrice cu (6.2)este :

$$\mathbf{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}$$

Elementul de volum în coordonate cilindrice (6.3)este :

$$\mathbf{dV} = \rho \mathbf{d}\rho \mathbf{d}\theta \mathbf{dz}$$

□

Coordonate sferice

Între coordonatele sferice (ρ, θ, φ) şi cele carteziene (x, y, z) există relaţiile:

$$\begin{array}{c} x = \rho\cos\theta\ \sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{array} \quad \text{şi} \quad \begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = arctg\frac{y}{x} \\ \varphi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}$$

Cu notaţiile de la coordonatele curbilinii generalizate avem :

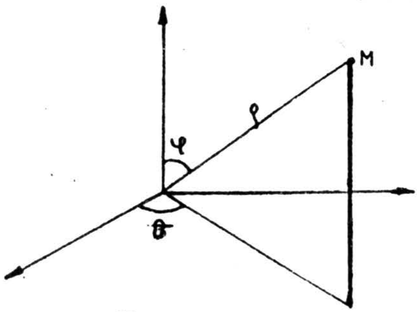


Fig. 70

$$q_1 = \rho\ ,\ q_2 = \theta\ ,\ q_3 = \varphi$$

$$\overrightarrow{r} = \rho\cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \rho\sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{j} + \rho\cos\varphi\,\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\rho} = \sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + \cos\varphi\,\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\theta} = -\rho\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \rho\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial\varphi} = \rho\cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \rho\sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{j} - \rho\sin\varphi\,\overrightarrow{k}$$

Se obţine :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0 \; ; \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0 \; ; \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0$$

Coeficienţii lui Lamè în coordonate sferice sunt :

$$H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \sqrt{\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi} = 1$$

$$H_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \rho \sin\varphi$$

$$H_3 = \rho$$

Elementul de arc în coordonate sferice cu (6.2)este :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2\varphi d\theta^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

Elementul de volum în coordonate sferice cu (6.3)este :

$$dV = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

□

6.3 Operatori diferenţiali în coordonate curbilinii ortogonale.

Pentru a putea utiliza coordonatele curbilinii , trebuie să determinăm expresiile gradientului , rotorului , divergenţei şi operatorului lui Laplace în aceste coordonate .

Gradientul *grad* Φ în coordonate curbilinii ortogonale : q_1, q_2, q_3

Cu proprietatea :

$$gradF(\varphi) = F'(\varphi)grad\varphi$$

rezultă :

$$grad\Phi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\, grad\ q_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\, grad\ q_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\, grad\ q_3$$

Dar:

$$grad\ q_i = h_i\vec{e_i} = \frac{1}{H_i}\vec{e_i}\ ;\ i = \{1, 2, 3\} \tag{6.4}$$

deci:

$$grad\Phi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\vec{e_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\vec{e_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\vec{e_3}$$

în coordonate cilindrice avem :

$$\mathbf{grad\Phi}(\rho, \vartheta, \mathbf{z}) = \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\rho}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{z}}\vec{\mathbf{e}}_3$$

iar în coordonate sferice avem:

$$\mathbf{grad\Phi}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\rho}\vec{\mathbf{e}}_1 + \frac{\mathbf{1}}{\rho\ \sin\varphi}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\theta}\vec{\mathbf{e}}_2 + \frac{\mathbf{1}}{\rho}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi}\vec{\mathbf{e}}_3\ .$$

□

Rotorul $rot\vec{V}$ **, în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale :** q_1, q_2, q_3

Fie :

$$\overrightarrow{V} = V_1\overrightarrow{e_1} + V_2\overrightarrow{e_2} + V_3\overrightarrow{e_3}$$

Avem:

$$rot\,\overrightarrow{V} = rot(V_1\overrightarrow{e_1}) + rot(V_2\overrightarrow{e_2}) + rot(V_3\overrightarrow{e_3})$$

adică :

$$rot\,\overrightarrow{V} = grad\,V_1 \times \overrightarrow{e_1} + V_1 rot\ \overrightarrow{e_1} + grad\,V_2 \times \overrightarrow{e_2} + V_2 rot\ \overrightarrow{e_2} + grad\,V_3 \times \overrightarrow{e_3} + V_3 rot\ \overrightarrow{e_3} \tag{6.5}$$

Pentru a calcula $rot\ \vec{e_i}$, ţinem seama de relaţia (6.4) .
Dar :

$$rot\ grad\ q_i = 0$$

$$rot\ grad\ q_i = rot(\frac{1}{H_i}\vec{e_i})$$

Urmează că :

$$\frac{1}{H_i}\ rot\ \vec{e_i} + grad\ \frac{1}{H_i} \times \vec{e_i} = 0$$

din:

$$grad\frac{1}{H_i} = -\frac{1}{H_i^2}\ grad\ H_i\ ;\ i = \{1, 2, 3\}$$

rezultă :

$$rot\ \vec{e_i} = \frac{H_i}{H_i^2}\ grad\ H_i \times \vec{e_i}\ ;\ i = \{1, 2, 3\} \tag{6.6}$$

Urmează că :

$$V_i\ rot\vec{e_i} + grad\ V_i \times \vec{e_i} = \frac{V_i}{H_i}\ grad\ H_i \times \vec{e_i} + grad\ V_i \times \vec{e_i} =$$

$$= (\frac{V_i}{H_i}\ grad\ H_i + grad\ V_i) \times \vec{e_i} = \frac{1}{H_i}grad(V_iH_i) \times \vec{e_i}\ ;\ i = \{1, 2, 3\}$$

Introducând în expresia lui $rot\vec{V}$ din (6.5) obţinem :

$$\mathbf{rot}\ \vec{V} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\mathbf{H_i}}\mathbf{grad(V_iH_i)} \times \vec{e_i}$$

□

Divergenţa $div\vec{V}$, în coordonate curbilinii ortogonale: q_1, q_2, q_3

Fie :

$$\overrightarrow{V} = V_1 \overrightarrow{e_1} + V_2 \overrightarrow{e_2} + V_3 \overrightarrow{e_3}$$

Avem:

$$div \overrightarrow{V} = div(V_1 \overrightarrow{e_1}) + div(V_2 \overrightarrow{e_2}) + div(V_3 \overrightarrow{e_3})$$

adică :

$$\begin{aligned} div \overrightarrow{V} = grad\ V_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + V_1 div\ \overrightarrow{e_1} + grad\ V_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \\ + V_2 div\ \overrightarrow{e_2} + grad\ V_3 \cdot \overrightarrow{e_3} + V_3\ div \overrightarrow{e_3} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Pentru a calcula $div\ \overrightarrow{e_i}$, ţinem seama de relaţiile:

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$$

de unde :

$$div\ \overrightarrow{e_1} = \nabla \cdot (\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}) = rot\ \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} - rot\ \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_2}$$

Dar cu formula (6.6) avem :

$$div\ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_3} \cdot \frac{1}{H_2}(\ grad\ H_2 \times \overrightarrow{e_2}) - \overrightarrow{e_2} \cdot \frac{1}{H_3}(\ grad\ H_3 \times \overrightarrow{e_3})$$

$$div\ \overrightarrow{e_1} = (\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}) \cdot \left[\frac{1}{H_2}\ grad\ H_2 + \frac{1}{H_3}\ grad\ H_3\right]$$

$$div\ \overrightarrow{e_1} = (\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}) \cdot \frac{1}{H_2 H_3} grad(H_2 H_3)$$

adică :

$$div\ \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1} \cdot \frac{1}{H_2 H_3} grad(H_2 H_3)$$

Prin permutări circulare obţinem :

$$div\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} \cdot \frac{1}{H_1 H_3} grad(H_1 H_3)$$

$$div\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3} \cdot \frac{1}{H_2 H_1} grad(H_2 H_1)$$

Introducând în expresia $div\overrightarrow{V}$ din (6.7) obţinem :

$$div\overrightarrow{V} = \frac{V_1}{H_2 H_3}\ \overrightarrow{e_1} \cdot grad(H_2 H_3) + \frac{V_2}{H_1 H_3}\ \overrightarrow{e_2} \cdot grad(H_1 H_3) +$$

$$+\frac{V_3}{H_1 H_2} \overrightarrow{e_3} \cdot grad(H_1 H_2) + grad\ V_1 \cdot \overrightarrow{e_1}\ + grad\ V_2 \cdot \overrightarrow{e_2}\ + grad\ V_3 \cdot \overrightarrow{e_3}$$

$$\begin{aligned} div\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{e_1} \cdot \left[\tfrac{V_1}{H_2 H_3} grad(H_2 H_3) + gradV_1\right] \\ &+ \overrightarrow{e_2} \cdot \left[\tfrac{V_2}{H_1 H_3} grad(H_1 H_3) + gradV_2\right] + \qquad \Longrightarrow \\ &\overrightarrow{e_3} \cdot \left[\tfrac{V_3}{H_2 H_1} grad(H_2 H_1) + gradV_3\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} div\overrightarrow{V} &= \tfrac{1}{H_2 H_3} \overrightarrow{e_1} \cdot grad(H_2 H_3 V_1) + \tfrac{1}{H_3 H_1} \overrightarrow{e_2} \cdot grad(H_3 H_1 V_2) + \qquad \Rightarrow \\ &+ \tfrac{1}{H_1 H_2} \overrightarrow{e_3} \cdot grad(H_2 H_2 V_3) \end{aligned}$$

$$div\overrightarrow{V} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \Big[grad(H_2 H_3 V_1) \cdot H_1 \overrightarrow{e_1} + grad(H_3 H_1 V_2) \cdot H_2 \overrightarrow{e_2} + + grad(H_2 H_1 V_3) \cdot H_3 \overrightarrow{e_3}\Big]$$

Dar:

$$H_1 \overrightarrow{e_1} \cdot grad\Phi = H_1 \overrightarrow{e_1} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\ grad\ q_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\ grad\ q_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\ grad\ q_3\right)$$

sau utilizând (6.4) se obţine :

$$H_1 \overrightarrow{e_1} \cdot grad\Phi = H_1 \overrightarrow{e_1} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \frac{1}{H_1}\ \overrightarrow{e_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \frac{1}{H_2}\ \overrightarrow{e_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \frac{1}{H_3}\ \overrightarrow{e_3}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}$$

Urmează că $div\overrightarrow{V}$ în coordonate curbilinii ortogonale este:

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{H_1H_2H_3}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q_1}}(\mathbf{H_2H_3V_1}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_2}}(\mathbf{H_1H_3V_2}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_3}}(\mathbf{H_1H_2V_3})\right]$$

□

Operatorul lui Laplace în coordonate curbilinii ortogonale: q_1, q_2, q_3

Operatorul lui Laplace a fost definit astfel :

$$\Delta\Phi = div\ grad\Phi \ = \nabla \cdot \nabla\Phi$$

Dar:

$$grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{1}{H_1}\ \vec{e_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\ \frac{1}{H_2}\ \vec{e_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\ \frac{1}{H_3}\ \vec{e_3}$$

Se aplică acestui vector divergenţa unde:

$$V_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{1}{H_1}\ \ ;\ V_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\frac{1}{H_2}\ \ ;\ V_3 = \ \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\frac{1}{H_3}$$

Obţinem:

$$\mathbf{\Delta\Phi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{H_1H_2H_3}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q_1}}(\frac{\mathbf{H_2H_3}}{\mathbf{H_1}}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{q_1}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_2}}(\frac{\mathbf{H_1H_3}}{\mathbf{H_2}}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{q_2}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_3}}(\frac{\mathbf{H_2H_1}}{\mathbf{H_3}}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{q_3}})\right]$$

□

Pentru **coordonatele cilindrice :**

$$q_1 = \rho\ ;\ q_2 = \theta\ ;\ q_3 = z$$

coeficienţii lui Lamè sunt :

$$H_1 = 1\ ;\ H_2 = \rho\ ;\ H_3 = 1$$

şi pentru laplacian avem exprimarea următoare :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z})\right]$$

adică :

$$\boldsymbol{\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}$$

□

Pentru **coordonatele sferice :**

$$q_1 = r\ ;\ q_2 = \theta\ ;\ q_3 = \varphi$$

coeficienţii lui Lamè sunt :

$$H_1 = 1\ ;\ H_2 = r\ \sin\varphi\ ;\ H_3 = r$$

şi pentru laplacian avem exprimarea următoare :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi})\right]$$

adică :

$$\boldsymbol{\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi})}$$

□

CUPRINS

1.		**Algebră vectorială**	 1
	1.1	Introducere	 1
	1.2	Operaţii cu vectori	 2
	1.3	Produsul scalar	 14
	1.4	Produsul vectorial	 17
	1.5	Produsul mixt	 19
	1.6	Dublul produs vectorial	 20
	1.7	Exerciţii	 23
2.		**Planul şi dreapta**	 25
	2.1	Planul	 25
	2.2	Dreapta	 30
	2.3	Exerciţii	....
3.		**Cuadrice**	 39
	3.1	Sfera	 39
	3.2	Elipsoidul	 40
	3.3	Hiperboloizii	 42
	3.4	Paraboloizii	 45
	3.5	Conul	 48
	3.6	Suprafeţe cilindrice	 49
	3.7	Exerciţii	 51
4.		**Elemente de teoria câmpului**	 53
	4.1	Generalităţi	 53
	4.2	Câmp scalar	 54
	4.3	Câmp vectorial	 62
	4.4	Integrale de suprafaţă	 69
	4.5	Fluxul unui câmp vectorial	 73
	4.6	Divergenţa unui câmp vectorial	 77
	4.7	Circulaţia unui câmp vectorial	 83
	4.8	Rotorul unui câmp vectorial	 84
5.		**Operatori diferenţiali vectoriali şi scalari**	 89
	5.1	Introducere	 89
	5.2	Operatori de ordinul întâi	 90
	5.3	Operatori de ordinul al doilea	 92
	5.4	Formule integrale	 95
	5.5	Clasificarea câmpurilor vectoriale	 97
	5.6	Câmp solenoidal	 105
	5.7	Câmp laplacian	 110
	5.8	Câmp general	 113
	5.9	Determinări de câmpuri	 114
6.		**Coordonate curbilinii generalizate**	 119
	6.1	Coordonnate curbilinii generalizate	 119
	6.2	Coordonate curbilinii ortogonale	 123
		Bibliografie	 135
		Cuprins	 136

Bibliografia

[1] . Mihnea , G.,(1984) *Culegere de probleme de teoria câmpurilor* , Tipografia I.P.G.G Bucureşti .

[2] . Livovschi , L. şi Mihnea , G.,(1982) *Matematici Speciale* ,Tipografia Universităţii Bucureşti .

[3] . Mihnea ,G.şi Tucsnak, Z. (1994) *Matematici Speciale* ,Tipografia Universităţii Bucureşti .

[4] . Dunning ,J.,D.(1994) *Mathematical Methods for Mathematicians Physical Scientists and Engineers* , Ellis Horwood.

[5] . Mihnea ,G. (1997) *Capitole speciale de Matematică*, Editura Universităţii din Bucureşti .

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 695/2000,
la Tipografia Editurii Universității din București

ISBN 973-575-443-6

Lei 24800